.5. 6. 232

Digitized by Google

5
6
232

SECTIONUM CONICARUM COMPENDIUM

AUCTORE

D. OCTAVIANO CAMETTI
ABBATE VALLUMBROSANO,
IN PISANA UNIVERSITATE
MATHESEOS PUBLICO PROFESSORE;
ET REGIÆ LUGDUNENSIS
ACADEMIÆ SOCIO.

VENETIIS,
EX TYPOGRAPHIA BALLEONIANA.
MDCCLXV.

SUPERIORUM PERMISSU, ac PRIVILEGIIS.

3.5

Digitized by Google

5.6.232

PRÆFATIO.

DOctrina ſectionum coni, quam explicare aggredior in præſentia, mirum in modum confert ad Matheſim, & Phyſicam excolendam. Et ſane innumera ſunt problemata plana indeterminata, quæ ſolutiones admittunt numero infinitas, & infinita ſolventia habent puncta; locus autem & ſedes punctorum omnium, quæ ſatisfaciunt quæſtioni, quandoque eſt linea recta, aut circuli circumferentia, quandoque vero eſt una e conicis ſectionibus, & ideo qui ignorat earum ſymptomata principalia, tentabit fruſtra horum pro-

blematum ſolutionem. Quin etiam determinata problemata ſæpe occurrunt, quæ idcirco ſolida nuncupantur, quod eorum ſolutio perfici prorſus nequeat, niſi duæ curvæ adhibeantur, ortæ a ſectione coni, qui eſt unum ex ſolidis geometricis. Ejuſmodi eſt problema de duplicando cubo, & illud quoque de triſectione cujuſcunque anguli rectilinei; quapropter vanos conatus edit, qui utriuſque problematis ſolutionem linea recta ſolum, & circulo inveſtigat.

Nedum cognitio ſectionum coni eſt Matheſi admodum neceſſaria, ſed etiam Phyſicæ opportuna. Et quidem ſi pila in medio non reſiſtenti manu, baliſta, aut etiam tormento bellico projiciatur, ejuſdem ſemita erit *Parabola*, quæ prima eſt ex conicis ſectionibus. Conſtat pariter ex Nevvtoni hypotheſi gravitatis, quam accuratiores Philoſophi amplectuntur, circa Solem Planetas ſingulos ſic rotari, ut orbitæ illorum totidem ſint *Ellipſes*, fixo manente Sole in uno, communique

earum

earum foco; idem ſimiliter de Cometis reſpectu Solis, deque Secundariis Planetis relate ad ſuos Primarios eſt dicendum. Denique in ſolaribus Horologiis umbra ſtyli gnomonici ſæpe ſolet in illo, cui inſiſtit, plano *Hyperbolam* deſignare, & ex hyperbola revoluta circa ejus axem, plerumque ſpecula efformantur, quæ reddunt objecti imaginem viciniorem. Ex quo colligi poteſt, abſque doctrina ſectionum coni omnem aditum intercludi juvenibus ſtudioſis ad Aſtronomiam, Mechanicam, Opticam, & Gnomonicam addiſcendam.

Cum vero hæc tam utilis Scientia ſectionum coni in Apollonii Pergæi libris nimis prolixa methodo ſit expoſita, arbitrati ſunt aliqui Recentiores ſtudioſis adoleſcentibus rem gratiſſimam ſe facturos, ſi retento more Antiquorum, compendioſius illam traderent, inter quos eminet celeberrimus D. Guido Grandus, a quo conſcripta fuit Synopſis ſectionum coni, pluries typis edita, & a me quondam commentariis illu-

ſtrata, Quia tamen & hæc ſynopſis, quam per plures annos in privatis lectionibus explicavi, auditoribus meis paullo obſcurior, & difficilior videbatur, ideo me putavi ſtudioſis adoleſcentibus profuturum, ſi præcipuas proprietates ſectionum coni, & eas præſertim quæ in Phyſico-Mathematicis diſciplinis plurimum uſum habent, altera, eaque clariori methodo demonſtrarem.

Initio ergo Veteres imitatus, expoſui omnes modos ſecandi conum, ex quibus curvæ oriuntur in ipſa conica ſuperficie, & ſubinde indicatis præcipuis characteribus, unde una ab altera ſecernatur, illas in plano poſtea deſignavi; adoleſcentes ſiquidem hac ratione clariorem acquirent ideam omnium ſectionum coni, quam ſi cum Hoſpitalio, Simſon, & aliis Geometris recentioribus illas ab initio hujus tractatus inſtrumentis mechanicis deſcripſiſſem. In detegendis diametris ſecundariis ſecutus ſum methodum Simſonianam, quæ quamvis longior illa ſit, quam Grandus adhi-
bet

bet in Synopſi, magis perſpicua tamen eſt, & juventuti erudiendæ accommodata. Doctrina focorum Ellipſeos & Hyperbolæ, quæ apud alios Auctores ſolet eſſe difficilis & obſcura, in hoc tractatu eſt facilis, & perſpicua; nam tria Lemmata geometrica, quæ theorematibus ad focos ſpectantibus præmittuntur, plurimam lucem ferunt ad ea brevius, & clarius demonſtranda.

Ut menſurarem ſpatia curvilinea a ſectionibus conicis comprehenſa, ſatius exiſtimavi, ſi indiviſibilium methodo Cavalerii, utpote parum tutæ, infinite parvorum alteram ſuſtituerem; ita enim Syntheſim adhibendo, non ſolum facile adinveni Parabolæ quadraturam, ſed & præterea demonſtravi Ellipſeos quadraturam ab illa circuli, & quadraturam Hyperbolæ a rectificatione Parabolæ dependere. Quoſdam pariter uſus phyſicos, Tyronum captui magis accommodatos, huc illuc inſerui in hoc tractatu, ut inde diſcant, quam uberes fructus ex hac doctrina ſint in poſte-

Google

rum percepturi. Denique nequid foret, quod Tyronibus moram faceret in his ſectionibus conicis percurrendis, indicare non prætermiſi propoſitiones omnes Euclidis, ex Geometria Tacqueti ſumptas, quibus innixa eſt hujus tractatus quælibet demonſtratio. Unde illud me arbitror conſecutum, ut quicunque in Geometria ſatis peritus, ad hæc elementa animum applicuerit, ea per ſe ipſe ſine ductore ullo admodum facile aſſequatur.

DE

DE SECTIONIBUS CONICIS.

CAPUT PRIMUM.

De geneſi Sectionum coni.

DEFINITIO PRIMA.

SI per aliquod punctum A extra planum circuli DEB traducta ſit recta FB, quæ puncto A manente fixo, circa peripheriam circuli convertatur, perpetuo illam radens, donec in eum redeat ſitum, ex quo moveri cœperat; utraque ſuperficies ex hoc lineæ motu genita, atque hinc inde a puncto A conſtituta, *Conica* appellatur. Solida vero ADEB, AFOL his ſuperficiebus & circulis DEB, FOL intercepta, vocantur *Coni*, quorum *Baſes* ſunt iidem circuli, *Vertex* autem eſt punctum fixum A. Tab. I. Fig. 1.

COROLLARIUM I.

Igitur recta AE, quæ jungit verticem coni A cum aliquo puncto E circumferentiæ baſeos DEB, jacet in conica ſuperficie. Etenim dum

AB rotando impingit in punctum E, debet congruere cum AE. Eſt vero AB in ſuperficie conica quam producit; ergo & AE in eadem jacere debet.

Corollarium II.

Etiam recta AH, quæ jungit verticem coni A cum aliquo ſuperficiei conicæ puncto H, jacet in conica ſuperficie. Quippe cum recta AB, quæ rotatione ſua gignit coni integram ſuperficiem, tranſeat per quodlibet ejus punctum, tranſibit quoque per punctum H, proindeque coincidet cum AH; ergo hæc quoque erit in conica ſuperficie, ideoque producta, attinget baſim in puncto E.

Corollarium III.

At ſi HI, quæ non tranſit per verticem coni A, jungat duo puncta quælibet H & I ejuſdem conicæ ſuperficiei, tota debebit cadere intra conum. Quippe ſi junctis AH, AI, quæ
(a) per cor. 2. defin. 1. ulterius productæ attingent (a) baſim in E & B, agatur EB, hæc intra circulum tota (b)
(b) per pr. 2. l. 3. cadet; ergo etiam triangulum EAB quod tranſit per EB, ſecatque propterea baſim coni, neceſſario immergitur intra conum. Sed recta HI
(c) per pr. 2. l. 11. quæ ſecat binas AE, AB, poſitas in plano (c) trianguli EAB, eſt in trianguli ejuſdem (d)
(d) per pr. 7. l. 11. plano; ergo & ipſa immergitur intra conum.

Definitio II.

Tab. I. Fig. 2. Recta AC, quæ jungit verticem coni A cum centro baſis, dicitur *Axis* coni. Quando axis eſt rectus ad planum baſis, conus vocatur *Rectus*; quando autem eſt obliquus ad planum baſis, conus *Scalenus* dicitur.

Pro-

PROPOSITIO I.

Si conus ſecetur plano, quod per verticem ejus tranſit, inde genita ſectio, erit triangulum rectilineum.

Conus ADEB ſecetur plano traducto per verticem ejus A, & per duo puncta quælibet D & E circumferentiæ baſeos DEB. Tab. I. Fig. 2. Cum tria puncta A, D, E ſint poſita (a) in ſecante plano, utique ſi jungantur rectæ AD, AE, jacebunt ipſæ in illo plano. (a) per hyp. Atqui ſunt quoque (b) in conica ſuperficie; igitur ambæ erunt communes ſectiones ſecantis plani, & conicæ ſuperficiei, (b) per cor. 1. defin. 1. atque adeo planum quod per verticem ſecat conum, in hujus efficit ſuperficie duas rectas AD, AE. Atqui idem planum efficit quoque in plano baſis rectam (c) DE, quæ communis eſt ſectio utriuſque; igitur ſectio conica inde orta erit triangulum rectilineum DAE. (c) per pr. 3. l. 11.

COROLLARIUM.

Quia planum per axem AC traductum, tranſit quoque per verticem coni A, & per centrum baſeos DEB, utique ſi conus ſecetur plano per axem ducto, ſectio inde orta erit (d) triangulum rectilineum DAB, cujus baſis DB eſt diameter circuli DEB. (d) per hanc pr.

SCHOLION.

Quoniam in cono recto ADEB axis AC eſt (e) rectus ad planum baſis, quævis ſectio triangularis per axem facta, erit (f) recta ad planum baſis. Tab. I. Fig. 3. (e) per def. 2. Secus autem accidit in ſcaleno ADFB, cujus ſola ſectio DAB quæ tranſit per axem AC, & altitudinem coni AE, eſt (g) recta ad planum baſis; (f) per pr. 18. l. 11. Tab. I. Fig. 4. aliæ autem ſectiones hinc inde factæ, veluti FAH, etiamſi (g) per eandem.

tran-

tranſeant per axem AC, ſunt obliquæ tamen ad planum baſis.

Propositio II.

Tab. I. Fig. 3. Si conus ADEB ſecetur plano parallelo ad ejus baſim, ſectio inde genita HIG, circulus erit.

Ducto axe AC qui ſecanti plano occurrat in puncto L, per ipſum ſecetur conus (*a*) plano trianguli DAB, quod cum planis parallelis HIG, DEB faciet ſectiones HG, DB mutuo (*b*) parallelas. Sumpto deinde aliquo puncto I in ſectionis perimetro HIG, & juncta AI quæ producta (*c*) attinget baſim in E, jungantur IL, EC, quæ cum ſint communes ſectiones plani trianguli EAC cum planis parallelis HIG, DEB, erunt (*d*) quoque mutuo parallelæ. Ob parallelas ergo IL, EC, eſt (*e*) EC ad IL, ut CA ad AL. Sed propter parallelas HL, DC, etiam DC eſt ad HL, ut CA ad AL; ergo EC erit (*f*) ad IL, ut DC ad HL. Eſt vero EC ipſi DC æqualis, cum ambæ ſint radii circuli DEB; ergo & IL (*g*) æquabitur ipſi HL. Simili modo oſtendam, eidem HL æquari quamlibet aliam rectam, quæ jungit aliud quodvis punctum perimetri HIG cum puncto L; ergo hæc ſectio erit circulus, habens pro centro L, & pro diametro ipſam HG.

(*a*) per cor. pr. 1.
(*b*) per pr. 16. l. 11.
(*c*) per cor. 2. pr. 1.
(*d*) per pr. 16. l. 11.
(*e*) per cor. 1. pr. 4. l. 6.
(*f*) per pr. 11. l. 5.
(*g*) per pr. 14. l. 5.

Scholion.

Hic modus ſecandi conum, circulum gignens, æque cono recto convenit ac ſcaleno; ſed alia etiam in ſcaleno fieri poteſt ſectio circulum generans, quam præmiſſo ſequenti lemmate exponemus.

Lem-

LEMMA.

Si in figura aliqua ADC quadratum cujuslibet rectæ DF perpendiculariter ductæ ad poſitione datam AC, ſemper ſit æquale rectangulo AFC; figura eadem ADC circulus erit, cujus diameter eſt AC. Tab. I. Fig. 5.

Biſariam ſecta AC in E, & juncta ED, erit AE quadratum æquale (*a*) quadrato FE una cum rectangulo AFC. Atqui FD quadratum (*b*) æquatur rectangulo AFC; ergo & AE quadratum æquale erit duobus quadratis ſimul FE, FD, ſive uni (*c*) quadrato DE, unde AE æquabitur ipſi DE. Pari modo conſtabit, ipſi DE æquari quamlibet aliam rectam, ductam ex quovis altero puncto curvæ ad punctum E; figura itaque ADC circulus erit, cujus diameter eſt AC.

(*a*) per pr. 5. l. 2.
(*b*) per hyp.
(*c*) per pr. 47. l. 1.

PROPOSITIO III.

Si conus ſcalenus ABEC ſectus per axem triangulo BAC recto ad planum circuli BEC, rurſus ſecetur altero plano ad rectos angulos ipſi BAC, quod ex parte A abſcindat triangulum GAK ſimile alteri BAC, ſed poſitum ſubcontrarie, ut nempe angulus AGK æqualis ſit alteri ACB; ſectio inde genita GHK circulus erit. Tab. I. Fig. 6.

IN plano baſeos BEC agatur EI ipſi BC normalis, & ſumpto quolibet puncto H in perimetro ſectionis, demittatur ex illo ad GK perpendicularis HF. Quia triangulum BAC eſt (*d*) rectum plano circuli BEC, viciſſim hoc quoque erit rectum plano trianguli BAC, ideoque EI quæ normalis (*e*) eſt ad BC communem illorum interſectionem, etiam recta erit (*f*) ad planum trianguli BAC. Sed quia pla-

(*d*) per hyp.
(*e*) per conſtr.
(*f*) per def. 4. l. 11.

planum pariter GHK eſt (a) rectum plano trianguli BAC, utique HF quæ normalis eſt (b) ad GK communem illorum interſectionem, etiam erit (c) recta ad planum trianguli BAC; igitur parallelæ (d) erunt EI, HF, unde per punctum F traducta DO parallela ipſi BC, binæ DF, FH æquidiſtabunt binis BI, IE, & planum tranſiens per priores, erit (e) parallelum plano baſeos BEC tranſeunti per poſteriores, ideoque ſectio DHO circulus (f) erit, cujus diameter eſt DO. Jam vero ob parallelas DO, BC, angulus AOD aut KOF æquatur (g) angulo ACB; ergo cum angulus AGK vel DGF ſit quoque (h) æqualis angulo ACB, etiam angulus DGF æquabitur KOF. Verum angulus DFG æquatur (i) ipſi OFK; ergo triangulum GDF (k) erit ſimile OFK, & GF erit ad FO, ut DF ad FK, unde rectangulum GFK æquabitur (l) alteri DFO. Sed quia eſt HF recta ad planum trianguli (m) BAC, etiam normalis (n) erit ipſis DO, GK, ductis in illo plano; ergo in circulo DHO erit HF quadratum æquale (o) rectangulo DFO aut ſibi æquali alteri GFK, unde circulus quoque erit (p) ſectio GHK.

(a) per hyp. (b) per conſtr. (c) per def. 4. l. 11. (d) per pr. 6. l. 11. (e) per pr. 15. l. 11. (f) per pr. 2. (g) per (h) per hyp. pr. 27. l. 1. (i) per pr. 15. l. 1. (k) per pr. 4. l. 6. (l) per pr. 16. l. 6. (m) per demonſtr. (n) per def. 3. l. 11. (o) per cor. 1. pr. 17. l. 6. (p) per lemm. huj. pr.

Scholion.

Circulares ſectiones coni quas hactenus expoſuimus, ſolent produci a plano non per verticem tranſeunte, & numquam cum plano baſeos conveniente. Cæterum quando planum quod non tranſit per coni verticem, ſecat baſim, tunc gignit ſectiones alias curvilineas in præſentia indicandas. Secetur primo conus ABMD per axem triangulo BAD, & ducta in hujus plano quælibet recta NK, quæ occurrat illius baſi BD in K, agatur ex K recta KM, eidem BD normalis. Denique rurſus

Tab. I. Fig. 7. 8. 9.

conus

conus ſecetur altero plano tranſeunte per binas rectas N K, K M, quod cum ejus baſi conveniat in recta M G. Pro triplici poſitione ejuſdem rectæ N K reſpectu laterum A B, A D trianguli B A D, tres curvilineæ fiunt ſectiones coni.

DEFINITIO III.

Si recta N K ſit parallela lateri uni A B trianguli B A D; tunc ſectio conica M N G *Parabola* appellatur. TAB. I. Fig. 7.

DEFINITIO IV.

At ſi N K occurrat lateri uni A D trianguli B A D infra verticem A in N, conveniat vero in Q cum latere alio A B ſupra eundem verticem A; tunc ſectio M N G *Hyperbola* dici ſolet, & recta N Q utroque latere intercepta, vocatur *Tranſverſum latus*. TAB. I. Fig. 8.

COROLLARIUM.

Sicuti ipſa N K verſus N producta, occurrit in puncto Q cono oppoſito A d m b, ita ſi planum tranſiens per rectas N K, K M, produceretur pariter verſus N, cum cono oppoſito conveniret ad punctum Q, gigneretque in illo ſectionem alteram m Q g, ſimilem alteri M N G, cujus *Oppoſita* dici ſolet.

DEFINITIO V.

Si denique recta N K occurrat utrique lateri A D, A B trianguli B A D infra verticem coni A, velut in N & Q; tunc ſectio M N G *Ellipſis* vocari ſolet, cujus *Latus tranſverſum* eſt recta N Q utroque latere intercepta. Neceſſe eſt autem, ut hæc ſectio nec parallela ſit baſi coni, nec ſubcontraria, alioquin (*a*) circulus ipſa foret. TAB. I. Fig. 9.

(*a*) per pr. 2. & 3.

COROLLARIUM.

Sicut N K producta occurrit lateri A B in Q, ita & planum tranſiens per rectas N K, K M, ſi produceretur, occurreret lateri A B in Q, ideoque ellipſis eſt curva linea in ſe rediens.

Scholion.

Ultra expoſitos modos ſecandi conum, nullus alius eſſe aut fingi poteſt; unde erunt quinque ſectiones coni, triangulum nempe, circulus, parabola, hyperbola, & ellipſis. Nunc autem ſolum ſpectandæ veniunt tres poſtremæ, nam ſymptomata circuli & trianguli ad Euclidæa pertinent Elementa.

Lemma.

Tab. II. Fig. 2. 3. Si parallelæ GK, DC junguntur binis DG, CK convenientibus mutuo ad punctum A, inde autem ex A agatur quælibet recta AE, quæ illas ſecet in H & E; erit GH ad HK, ut DE ad EC.

Quia ſunt (*a*) parallelæ GH, DE, triangulum AGH erit (*b*) ſimile ADE, & GH erit ad DE, ut AH ad AE. Verum ob parallelas (*c*) HK, EC, etiam triangulum AHK eſt (*d*) ſimile AEC, & HK eſt ad EC, ut AH ad AE; ergo (*e*) GH erit ad DE, ut HK ad EC, & permutando (*f*), GH erit ad HK, ut DE ad EC.

(*a*) per hyp.
(*b*) per pr. 4. l. 6.
(*c*) per hyp.
(*d*) per pr. 4. l. 6.
(*e*) per pr. 11. l. 5.
(*f*) per pr. 16. l. 5.

Propositio IV.

Tab. II. Fig. 1. Si conus ABMD ſecetur per axem triangulo BAD, & ducta in plano baſis qualibet recta MG perpendiculari ad diametrum ejus BD, ex quovis ſuperficiei conicæ puncto F agatur FH parallela ipſi MG, & terminata ad oppoſitam partem ſuperficiei in H; erit FH biſecta in puncto I, ubi nempe occurrit plano trianguli BAD.

Juncta AF quæ producta attinget (*g*) baſim in O, ducatur in plano baſis recta OR parallela ipſi MG, ſive (*h*) normalis diametro BD, quæ bifariam ſecabitur (*i*) in puncto S, jun-

(*g*) per cor. 2. def. 1.
(*h*) per pr. 27. l. 1.
(*i*) per pr. 3. l. 3.

jungaturque AR quæ erit (*a*) in conica ſuperficie. Quoniam FH, OR parallelæ ſunt tertiæ MG, utique erunt (*b*) etiam mutuo parallelæ, ideoque jacebunt in eodem plano, in quo erit etiam (*c*) recta AO, quæ illas ſecat in F & O. Itaque recta FH eſt in plano rectarum AO, OR, ſive in plano (*d*) trianguli OAR; idcirco ſicuti recta OR occurrit ipſi AR in R, ita & FH, quæ parallela eſt ad OR & incluſa triangulo OAR, neceſſario conveniet cum ipſa AR in H. Demum quia puncta A & S ſunt tam in plano trianguli BAD, quam in plano trianguli OAR, utique juncta AS erit communis ſectio utriuſque plani, quæ proinde tranſibit per punctum I commune (*e*) utrique plano; unde ob parallelas FH, OR, erit (*f*) FI ad IH, ut OS ad SR. Vidimus autem æquales eſſe OS, SR; ergo æquabuntur quoque FI, IH.

(*a*) per cor. 1. def. 1.
(*b*) per pr. 9. l. 11.
(*c*) per pr. 7. l. 11.
(*d*) per pr. 2. l. 11.
(*e*) per hyp. & conſtr.
(*f*) per lem. præc.

PROPOSITIO V.

Omnis recta, ut FH, parallela ipſi MG, & terminata utrinque a ſectionis perimetro MNG, bifariam ſecatur ab ipſa NK in I. Tab. I. Fig. 7. 8. 9.

Recta FH utrinque eſt terminata a ſectionis (*g*) perimetro MNG. Atqui perimeter ſectionis jacet in conica ſuperficie; ergo & recta FH terminata erit utrinque a conica ſuperficie. Sed eadem recta FH parallela eſt quoque (*h*) ipſi MG, quæ eſt normalis (*i*) diametro BD circuli BMD; ergo bifariam (*k*) dividetur in occurſu trianguli BAD. Occurrit autem plano trianguli BAD in puncto I, ubi nimirum incidit in NK communem ſectionem plani MNG & trianguli BAD; igitur recta FH ſecabitur bifariam ab ipſa NK in I.

(*g*) per hyp.
(*h*) per hyp.
(*i*) per ſchol. pr. 3.
(*k*) per pr. 4.

S c h o l i o n.

Si triangulum B A D rectum ſit plano circuli (a) per ſchol. pr. 1. B M D, veluti uſu venit ſemper (a) in cono recto, & ſemel accidit (b) in ſcaleno, tunc omnis (b) per idem. recta, ut F H, parallela ipſi M G, nedum bifariam, verum ad angulos etiam rectos ſecatur ab ipſa N K in I. Siquidem in hoc caſu etiam planum circuli B M D rectum erit plano trianguli B A D, atque adeo M K, quæ normalis eſt ad B D communem ſectionem circuli & trian(c) per def.4.l.11. guli, etiam normalis (c) erit plano trianguli B A D, rectuſque prodibit (d) angulus N K M. (d) per def.3.l.11. Verum ob parallelas F H, M G, angulus N I F (e) per pr.27.l.1. æquatur (e) alteri N K M; ergo etiam rectus erit angulus N I F, & ideo F H biſecta erit ad rectos angulos ab N K.

D e f i n i t i o VI.

Recta N K, quæ bifariam ſecat omnem aliam, ut F H, parallelam ipſi M G, & terminatam utrinque a ſectionis perimetro M N G, vocatur *Primigenia diameter* ſectionis, & punctum N *Vertex* diametri.

C o r o l l a r i u m.

Quia in hyperbola latus tranſverſum Q N eſt in directum cum N K, & in ellipſi coincidit cum eadem; etiam latus tranſverſum Q N erit diameter ſectionis, unde & *Diameter tranſverſa* dicitur, ejuſque punctum medium C vocatur *Centrum* ellipſeos aut hyperbolæ.

D e f i n i t i o VII.

Quando eadem recta N K bifariam ſimul atque normaliter ſecat omnem rectam, ut F H, parallelam ipſi F G; tunc ſpecialiter induit nomen *Axis*.

C o r o l l a r i u m.

(f) per ſchol. pr. 1. Ergo in quavis ſectione conica M N G genita in cono recto, ſemper N K eſt (f) axis, (g) per idem ſchol. idque ſemel accidit (g) in ſcaleno; in aliis autem

tem ſectionibus quæ in cono ſcaleno fiunt, eſt ſemper N K diameter.

DEFINITIO VIII.

Rectæ FH, MG, ſive earum ſemiſſes FI, MK, vocantur *ordinatæ* diametro primigeniæ NK, partes autem diametri NI, NK ab ordinatis & curvæ vertice interceptæ, *Abſciſſæ* appellari ſolent.

CAPUT II.

De trium ſectionum coni Symptomatis principalibus.

PROPOSITIO VI.

In quavis parabola MNG quadrata ordinatarum MK, FI ſunt ut abſciſſæ NK, NI.

TAB. II. Fig. 4.

IN plano trianguli BAD agatur per punctum I recta RV parallela ipſi BD. Quoniam binæ rectæ RI, IF parallelæ ſunt binis BK, KM, utique traductum planum per rectas RI, IF, erit (*a*) parallelum baſi BMD tranſeunti per reliquas BK, KM, gignetque proinde (*b*) in cono circulum RFV, cujus diameter eſt RV. Item ob rectas RI, IF parallelas ipſis BK, KM, angulus RIF (*c*) æquabitur BKM; ergo cum ſit rectus angulus BKM, etiam rectus erit reliquus RIF, ideoque FI quadratum æquabitur (*d*) rectangulo RIV. Sed etiam MK quadratum æquatur (*e*) rectangulo BKD; ergo quadratum MK erit ad quadratum FI, ut rectangulum BKD ad aliud RIV. Sed quia in parallelogrammo BRIK æquantur (*f*) BK, RI, rectangulum BKD eſt (*g*) ad rectangulum RIV, ut KD ad IV; ergo & quadra-

(*a*) per pr. 15. l. 11.
(*b*) per pr. 2.
(*c*) per pr. 10. l. 11.
(*d*) per cor. 1. pr. 17. l. 6.
(*e*) per idem cor.
(*f*) per pr. 34. l. 1.
(*g*) per pr. 1. l. 6.

tum MK erit ad quadratum FI, ut KD ad

(a) per cor. 1. pr. 4. l. 6. IV. Verum ob parallelas IV, KD, eſt (a) NK ad NI, ut KD ad IV; ergo MK quadratum erit ad quadratum FI, ut NK ad NI.

S c h o l i o n.

Hæc ipſa linea parabolica eadem prorſus cum illa eſt, quam in medio non reſiſtenti deſcribunt corpora projectilia. Conſtat ſiquidem ex *Baliſtica*, quod ſi in medio non reſiſtenti pila aliqua projiciatur juxta directionem horizontalem AR, vel horizonti quomodolibet inclinatam, ejuſdem ſemita eſt curva linea AOH, in qua ductis ordinatis GE, LO, earum quadrata ſunt inter ſe ut correſpondentes abſciſſæ AG, AL. Id autem convenit ſoli lineæ (b) parabolicæ; ergo projecti ſemita AOH eſt parabolica.

Tab. II. *Fig.* 5.

(b) per pr. 6.

Propositio VII.

Tab. II. *Fig.* 4.

In quavis parabola MNG ſi poſt abſciſſam NK & ordinatam MK inveniatur tertia proportionalis NS; hæc ipſa NS erit quoque tertia proportionalis poſt quamlibet aliam abſciſſam NI, & ordinatam FI ipſi correſpondentem.

Quadratum MK eſt (c) ad quadratum FI, ut NK ad NI, aut (pro communi altitudine ſumpta NS) ut (d) rectangulum ex NK in NS ad rectangulum ex NI in NS. Verum ob continue proportionales NK, MK, NS, eſt quadratum MK (e) æquale rectangulo ex NK in NS; ergo & quadratum FI æquabitur (f) rectangulo ex NI in NS, unde NI erit (g) ad FI, ut eadem FI ad NS, & NS erit tertia proportionalis poſt rectas NI, FI.

(c) per pr. 6.
(d) per pr. 1. l. 6.
(e) per pr. 17. l. 6.
(f) per pr. 14. l. 5.
(g) per pr. 17. l. 6.

Scho-

SCHOLION.

Hæc conſtans linea recta NS, quæ ad angulos rectos jungitur ipſi NK, dicitur *Latus rectum* ſive *Parameter* parabolæ MNG reſpectu diametri primigeniæ NK.

COROLLARIUM.

Si ergo ad parabolam MNG ordinetur aliqua recta FI, ejus quadratum æquale erit rectangulo ex correſpondenti abſciſſa NI in (*a*) latus rectum ſeu parametrum NS; atque adeo latus rectum tertia erit (*b*) proportionalis poſt abſciſſam & ordinatam.

(*a*) per hanc pr.

(*b*) per pr. 17. l. 6.

PROPOSITIO VIII.

Datis poſitione axe parabolæ & vertice, ac latere recto magnitudine etiam dato, ipſam in plano deſcribere, infinita ejus puncta determinando.

Tab. II. Fig. 6.

Rectæ NR, NS ad angulos rectos junctæ, referant axem parabolæ & latus rectum, vertex autem axis ſit in N. Producatur axis NR in A, donec NA æquetur lateri recto NS, & ſumpto in axe quolibet puncto G, ſuper AG diametro fiat ſemicirculus AOG, occurrens lateri recto in O. Agatur denique GT recta, quæ ſit normalis ad NR, æqualis vero ipſi NO: dico, punctum T eſſe in parabola deſcribenda. Nam cum æquentur (*c*) NO, GT, illarum quoque quadrata æqualia erunt. Atqui in ſemicirculo AOG eſt NO quadratum æquale (*d*) rectangulo GNA, aut etiam (*e*) alteri ex GN in NS; igitur etiam GT quadratum æquabitur rectangulo ex GN in NS, ſive ex abſciſſa in latus rectum, atque adeo punctum T eſt (*f*) in parabola deſcribenda. Pari modo oſtendam, etiam punctum F, & alia innume-

(*c*) per cor. 1. pr. 17. l. 6.

(*d*) per cor. 1. pr. 17. l. 6.

(*e*) per conſtr.

(*f*) per cor. pr. 7.

numera hoc modo determinata, ad quæſitam parabolam pertinere.

Scholium I.

Hujus propoſitionis ingens in Phyſica uſus eſt; ex ea namque colligitur ratio velocitatum,
Tab. II. quas ſucceſſive acquirit grave in G & L, dum
Fig. 5. ex puncto quietis A deſcendit libere per AF. Nam ſi quovis recto latere AR ſumpto, fiat
(a) per circa axem AF (a) parabola AOH, cui ſint
hanc pr. ordinatæ GE, LO; erit velocitas acquiſita lapſu AG ad eam, quam grave acquirit lapſu AL, ut ordinata GE ad ordinatam LO. Nam juxta Galilei hypotheſim gravitatis, quadratum velocitatis acquiſitæ poſt lapſum ex A in G, eſt ad quadratum velocitatis obtentæ poſt caſum ex A in L, ut ſpatium AG ad ſpatium AL. Sed
(b) per etiam in parabola AOH eſt (b) quadratum or-
pr. 6. dinatæ GE ad quadratum ordinatæ LO, ut
(c) per AG ad AL; ergo quadratum (c) celeritatis
pr. 11. l. 5. acquiſitæ in G erit ad quadratum celeritatis obtentæ in L, ut quadratum ordinatæ GE ad quadratum ordinatæ LO, ideoque etiam velo-
(d) per citas acquiſita lapſu AG erit (d) ad acquiſitam
pr. 22. l. 6. lapſu AL, ut ordinata GE ad ordinatam LO.

Scholion II.

Tab. II. Hinc colligi quoque poteſt ratio celeritatum
Fig. 7. fluidi ex vaſis foramine erumpentis. Eſto enim vas quodlibet BAF, in quo altitudo fluidi ſit AC, ſeu ejus libella ſit in MI, tum quovis
(e) per recto latere AR ſumpto, fiat (e) circa axem
hanc pr. AC parabola AOH, cui ſint ordinatæ CE, LO: dico, velocitatem fluidi erumpentis ex foramine A, dum ejus libella eſt in MI, eſſe ad velocitatem qua exit, dum ejus libella eſt in VG, ut ordinata CE ad ordinatam LO. Conſtat ſiquidem ex *Hydraulica* quadratum velocitatis fluidi erumpentis in primo caſu, eſſe ad quadratum velocitatis in altero, ut AC ad AL.

Sed

Sed etiam in parabola AOH eſt ordinatæ CE
quadratum (*a*) ad quadratum ordinatæ LO, (*a*) per
ut AC ad AL; ergo quadratum velocitatis pr. 6.
fluidi in primo caſu (*b*) erit ad quadratum ve- (*b*) per
locitatis in altero, ut quadratum ordinatæ CE pr. 11. l. 5.
ad quadratum ordinatæ LO, ideoque (*c*) etiam (*c*) per
velocitas fluidi erumpentis ex foramine A, dum pr. 22. l. 6.
ejus libella eſt in MI, erit ad ejus velocitatem,
quando ejus libella eſt in VG, ut ordinata
CE ad ordinatam LO.

PROPOSITIO IX.

In ellipſi, hyperbola, atque oppoſitis ſectionibus quadrata ordinatarum MK, FI ſunt inter ſe, ut rectangula QKN, QIN, quæ diametri partibus inter ordinatas & utrumque verticem poſitis, continentur. TAB. II. *Fig.* 8, 9. 10.

IN plano trianguli BAD traducta per punctum I recta RV parallela ipſi BD, trajiciatur planum per rectas RI, IF, quod ſicuti
(*d*) in parabola, ita & in hoc caſu gignet in (*d*) per
cono circulum RFV, cujus diameter eſt RV, pr. 6.
& huic recta FI normalis, unde FI quadratum
(*e*) æquabitur rectangulo RIV. Sed etiam in (*e*) per
circulo BMD eſt (*f*) MK quadratum æquale cor. 1. pr.
rectangulo BKD; ergo quadratum MK erit 17. l. 6.
ad quadratum FI, ut rectangulum BKD ad (*f*) per idem cor.
aliud RIV, ſive in ratione (*g*) compoſita ex (*g*) per
ratione BK ad RI, & ex ratione KD ad IV. cor. 2. pr. 23. l. 6.
Sed propter triangulum BQK ſimile (*h*) alteri (*h*) per
RQI, ratio BK ad RI eadem eſt ac ratio cor. 1. pr.
QK ad QI, & ob triangulum KND ſimile 4. l. 6.
(*i*) alteri INV, ratio KD ad IV eadem eſt (*i*) per
ac ratio KN ad IN; ergo etiam MK quadra- idem cor.
tum erit ad quadratum FI in ratione compoſita ex ratione QK ad QI, atque ex ratione

(a) per cor. 2. pr. 23. l. 6. KN ad IN. Verum & rectangulum QKN eſt ad rectangulum QIN in eadem (a) compoſita ratione; ergo MK quadratum erit (b) ad quadratum FI, ut rectangulum QKN ad rectangulum QIN.

(b) per pr. 11. l. 5.

Propositio X.

Si fiat, ut rectangulum QKN ad ordinatæ MK quadratum, ita latus tranſverſum QN ad quartam proportionalem NS; etiam quodvis aliud rectangulum QIN erit ad quadratum ordinatæ FI, ut idem latus tranſverſum QN ad NS.

(c) per pr. 9. Quadratum MK eſt (c) ad quadratum FI, ut rectangulum QKN ad rectangulum QIN. Igitur permutando (d), quadratum MK erit ad rectangulum QKN, ut quadratum FI ad rectangulum QIN, & invertendo (e), rectangulum QKN erit ad quadratum MK, ut rectangulum QIN ad quadratum FI. Atqui rectangulum QKN (f) eſt ad MK quadratum, ut QN ad NS; ergo & rectangulum QIN erit ad quadratum FI, ut QN ad NS.

(d) per pr. 16. l. 5.

(e) per ſchol. pr. 16. l. 5.

(f) per hyp.

Scholion.

Hæc conſtans linea recta NS, quæ ad rectos angulos jungitur ipſi NK, dicitur *Latus rectum* ſive *Parameter* ellipſis, hyperbolæ, & ſectionum oppoſitarum.

Corollarium. I.

Itaque ſi in ellipſi, hyperbola, & oppoſitis ſectionibus ordinetur aliqua recta FI diametro primigeniæ NK, rectangulum QIN erit ad ordinatæ (g) FI quadratum, ut latus tranſverſum QN ad rectum NS.

(g) per pr. 10.

Co-

COROLLARIUM II.

Hinc ſi latus tranſverſum QN æquale ſit lateri recto NS (quo in caſu tam hyperbola quam ellipſis dicitur *Æquilatera*) etiam rectangulum QIN æquale erit quadrato ordinatæ FI.

COROLLARIUM III.

Ellipſis igitur æquilatera eſt prorſus eadem atque (*a*) circulus. (*a*) per cor. 1. pr. 17. l. 6.

PROPOSITIO XI.

Datis latere tranſverſo & recto, deſcribere in plano ellipſim atque hyperbolam, infinita earum puncta determinando.

Rectæ BM, MS ad rectos angulos junctæ, Tab.III. Fig. 1. 2. referant latus tranſverſum & rectum, ſuperque BM diametrum facto ſemicirculo BOM, ex ejus quolibet puncto O agatur OI, quæ in figura prima perpendicularis ſit lateri tranſverſo BM, in altera autem circulum in O tangat. Rurſus latere tranſverſo BM producto donec ML æquetur lateri recto MS, deſcribatur ſuper BL diametro ſemicirculus alius BVL, occurrens ipſi MS in V. Denique fiat, ut BM ad MV, ita OI ad quartam proportionalem (*b*) per IE, quæ ſtatuatur ad rectos angulos ipſi MI: conſtr. dico, punctum E eſſe in ellipſi aut hyperbola (*c*) per deſcribenda. Nam cum OI ſit (*b*) ad IE, ut pr. 22. l. 6. BM ad MV, etiam quadratum OI erit (*c*) ad (*d*) per IE quadratum, ut quadratum BM ad quadra- cor. 1. pr. tum MV. Sed quia eſt (*d*) BM ad MV, ut 17. l. 6. MV ad ML, etiam BM erit (*e*) ad ML, ut (*e*) per cor. 2. pr. quadratum BM ad quadratum MV; ergo & 20. l. 6. quadratum OI erit ad quadratum IE, ut BM (*f*) per conſtr. ad ML, vel ut (*f*) BM ad MS. Verum OI (*g*) per cor. 1. pr. quadratum æquatur rectangulo (*g*) BIM; ergo 17. l. 6. & etiam rectangulum BIM ad quadratum IE, per pr. 36. l. 3.

erit,

Digitized by Google

(a) per conſtr. erit, ut BM ad MS, ſive ut (a) latus tranſverſum ad rectum, ideoque IE erit ordinata (b) per cor. 1. pr. 10. (b) ellipſeos aut hyperbolæ deſcribendæ, punctumque E ſpectabit ad utramque curvam. Simili modo oſtendam, etiam punctum R, & innumera alia hoc modo determinata, eſſe in ellipſi, aut hyperbola deſcribenda.

Propositio XII.

Tab. III. Fig. 1. 2. Si in ellipſi aut hyperbola ductis axi MH ordinatis HR, IE, ſuperque latere tranſverſo BM fiat ſemicirculus BOM, qui in ellipſi ſecetur ab ordinatis in F & O, tangatur vero in hyperbola a rectis HF, IO; erit HF ad IO, ut HR ad IE.

Quia in ſemicirculo BOM eſt quadratum (c) per cor. 1. pr. 16. l. 6. & per pr. 36. l. 3. HF æquale (c) rectangulo BHM, & quadratum IO rectangulo BIM, erit HF quadratum ad quadratum IO, ut rectangulum BHM ad rectangulum BIM. Eſt vero etiam HR quadratum ad quadratum IE, ut rectangu- (d) per pr. 9. lum BHM (d) ad rectangulum BIM; ergo (e) per pr. 11. l. 5. & HF quadratum erit (e) ad quadratum IO, ut quadratum HR ad quadratum IE, ideoque (f) per pr. 22. l. 6. (f) HF erit ad IO, ut HR ad IE.

Caput III.

De rectis lineis quæ contingunt ſectiones coni.

Definitio IX.

Recta, quæ conicæ ſectioni in unico puncto occurrit, utrinque vero producta extra ipſam cadit, dicitur *contingere* curvam in eo puncto.

Defi-

DEFINITIO X.

Recta AD quæ ita eſt diviſa in tres partes AB, BC, CD, ut tota AD ſit ad unam ex extremis CD, ut altera extrema AB ad partem mediam BC, dicitur *Harmonice* ſecta in B & C. TAB.III. *Fig.* 3.

PROPOSITIO XIII.

In omni ſectione conica MNG ſi ex vertice N diametri ejus NK agatur NF parallela alicui ordinatæ MG; ipſa continget curvam in puncto N. TAB.III. *Fig.* 4.

SI fieri poteſt, recta NF producta verſus N, occurrat denuo curvæ in O, adeout recta ſit linea ONF. Quia eſt NK diameter ſectionis, cui ordinata eſt recta MG, utique biſecabit lineas rectas omnes, terminatas utrinque a curva, & (*a*) parallelas ipſi MG. Sed eſt ON terminata quidem utrinque a curva, at non bifariam ſecta a recta NK; ergo non eſt ON parallela ipſi MG, cui proinde nec parallela erit NF, contra hypotheſim. Igitur recta NF occurrit curvæ in unico puncto N, utrinque vero producta, extra ipſam cadit, ideoque (*b*) continget curvam in puncto N.

(*a*) per def. 6.

(*b*) per def. 10.

COROLLARIUM I.

Et contra, ſi NF contingat curvam in vertice N diametri, erit parallela quoque ipſi MG. Nam ſi NF parallela non eſſet ad MG, utique duci poſſet per punctum N alia recta, quæ parallela eſſet ipſi MG; ideoque hæc ipſa, non vero NF, contingeret curvam (*c*) in puncto N, contra hypotheſim.

(*c*) per hanc pr.

COROLLARIUM II.

Si diameter NK fuerit axis curvæ, tangens NF perpendicularis erit ipſi NK. Quippe ob paral-

(a) per parallelas (a) NF, MG, angulus FNK (b)
cor. 1. æquabitur NKG; igitur cum ſit (c) rectus
(b) per pr. 27. l. 1. angulus NKG, etiam rectus erit reliquus
(c) per FNK, ideoque NF perpendicularis eſt ad
def. 7. NK.

COROLLARIUM III.

TAB. III. Hinc ſi ex utroque vertice C & R diametri
Fig. 8. & CR ellipſeos aut hyperbolæ agantur verticales
TAB. IV. tangentes CD, RZ; hæ erunt (d) parallelæ
Fig. 1. alicui ordinatæ AB, atque adeo (e) etiam
(d) per inter ſe.
cor. 1.

COROLLARIUM IV.

(e) per pr. 30. l. 1. Et ſi diameter CR fuerit axis curvæ utriuſque, verticales tangentes CD, RZ perpendiculares (f) erunt eidem axi.
(f) per cor. 2.

LEMMA.

TAB. III. Si hujuſmodi ſint tres rectæ GL, IL, KL,
Fig. 5. 6. ut quadratum primæ GL ſit ad quadratum ſecundæ IL in ratione primæ GL ad tertiam KL; erunt ipſæ continue proportionales.

Si rectæ GL, IL, KL non ſunt continue proportionales, ſunto ſi fieri poteſt, proportio-
(g) per nales GL, IL, & H. Itaque erit (g) GL
cor. 2. pr. 22. l. 6. ad H, ut quadratum GL ad quadratum IL.
(h) per Sed etiam GL eſt ad KL, ut (h) quadratum
hyp. GL ad quadratum IL; ergo GL (i) erit ad
(i) per pr. 11. l. 5. H, ut eadem GL ad KL, atque adeo H erit
(k) per (k) ipſi KL æqualis. Sunt vero (l) continue
pr. 9. l. 5. proportionales GL, IL, & H; ergo erunt
(l) per conſtr. quoque GL, IL, KL.

PRO-

Digitized by Google

Propositio XIV.

Ex quolibet puncto A ſectionis conicæ CIA ducere contingentem. Tab. III. Fig. 7. 8. & Tab. IV. Fig. 1.

SIT primo parabola CIA cujus diameter CB & diametri vertex C. Ductis ordinata AB, & huic parallela CD, quæ parabolam tanget (*a*) in vertice ejus C, agatur per A recta AD parallela diametro CB, quæ occurrat tangenti CD in D. Demum biſecta CD in E, jungatur AE: dico, AE parabolam tangere in puncto A. Nam juncta AC, & ducta qualibet GHIKL parallela ordinatæ AB, quadratum AB erit (*b*) ad quadratum IL, ut BC ad LC. Sed ob triangulum ACB (*c*) ſimile KCL, eſt AB ad KL, ut BC ad LC; ergo quadratum AB erit ad quadratum IL, ut AB ad KL. Sed cum GL ſit ipſi (*d*) AB æqualis, etiam GL quadratum æquatur quadrato AB; ergo & quadratum GL erit ad quadratum IL, ut GL ad KL, ideoque tres rectæ GL, IL, KL erunt continue (*e*) proportionales; unde GL erit ad IL, ut IL ad KL, & dividendo (*f*), GI ad IL, ut IK ad KL, & permutando (*g*), GI ad IK, ut IL ad KL. Eſt vero IL major KL; ergo & GI major erit IK, & duplum GI majus GI & IK ſimul, ſeu majus GK. Porro ob parallelas GK, DC, quas AE ſecat in H & E, eſt GH ad HK, ut (*h*) DE ad EC; ergo cum DE ſit (*i*) ipſi EC æqualis, etiam GH æquabitur ipſi HK, & duplum GH æquale erit GK. Vidimus autem duplum GI eſſe majus GK; ergo & majus erit duplo GH, & GI major GH, atque ideo punctum H rectæ AE cadit extra parabolam CIA. Id autem con-

(*a*) per pr. 13.
(*b*) per pr. 6.
(*c*) per cor. 1. pr. 4. l. 6.
(*d*) per pr. 34. l. 1.
(*e*) per lemm. præc.
(*f*) per pr. 17. l. 5.
(*g*) per pr. 16. l. 5.
(*h*) per lem. pr. 4.
(*i*) per conſtr.

convenit punctis omnibus rectæ A E tam ſupra
quam infra A; ergo eadem recta A E parabo-
lam tangit in puncto A.

Sit deinde ſectio data ellipſis aut hyperbola
C I A, cujus diameter C R & diametri ver-
tex C. Ducta, ut prius, ordinata A B, &
huic parallela C D, quæ utranque curvam con-
(a) per pr. 13. tinget (*a*) in puncto C, jungatur R A, quæ
producta ſecet C D in D, & bifariam ſecta
C D in E, jungatur A E: dico, A E utranque
curvam contingere in puncto A. Jungatur
enim A C, & ordinatæ A B parallela agatur
(b) per pr. 9. quælibet G H I K L. Quadratum A B eſt (*b*)
ad quadratum I L, ut rectangulum R B C ad
(c) per cor. 2. pr. 23. l. 6. rectangulum R L C, ſive in ratione (*c*) com-
poſita ex ratione R B ad R L, & ex ratione
(d) per cor. 1. pr. 4. l. 6. B C ad C L. Sed ob triangulum R B A (*d*) ſi-
mile R L G, ratio R B ad R L eadem eſt ac
ratio A B ad G L, & ob triangulum A C B ſi-
(e) per idem cor. mile (*e*) K L C, ratio B C ad C L eadem eſt
ac ratio A B ad K L; ergo quadratum A B
erit ad quadratum I L in ratione compoſita
ex ratione A B ad G L, & ex ratione ejuſ-
dem A B ad K L, hoc eſt, ut quadratum
(f) per cor. 2. pr. 23. l. 6. A B ad (*f*) rectangulum ex G L in K L;
ideoque quadratum I L æquabitur (*g*) rectan-
(g) per pr. 9. l. 5. gulo ex G L in K L, & G L erit (*h*) ad
(h) per pr. 17. l. 6. I L, ut eadem I L ad K L prorſus uti accidit
in parabola. Si ergo hic denuo repetatur ea-
dem demonſtratio, quam ſupra dedimus in pa-
rabola, oſtendetur, A E ellipſim aut hyperbo-
lam tangere in puncto A.

Corollarium I.

Tab. III. Fig. 7. Producta in parabola tangente A E in O,
ubi conveniat cum diametro, recta B O quæ
etiam *ſubtangens* dicitur, bifariam ſecta erit in
puncto C. Quippe ob parallelas A D, C O,
(i) per pr. 4. l. 6. triangulum A D E eſt (*i*) ſimile O C E; unde

A D

AD erit ad CO, ut DE ad EC. Sed eſt DE (*a*) ipſi EC æqualis; ergo & AD ſeu BC (*b*) æquabitur ipſi CO.

Corollarium II.

Si diameter CB ſit axis parabolæ CIA, cujus parameter CF, agaturque AM normalis tangenti AO, quæ occurrat axi CB in M; recta BM, quæ etiam dicitur *Subnormalis*, dimidia erit CF. Cum enim ex recto angulo OAM demiſſa ſit ad OM perpendicularis AB, erit (*c*) AB quadratum æquale rectangulo OBM. Eſt vero idem AB quadratum etiam æquale (*d*) rectangulo ex CB in CF; ergo rectangulum OBM æquabitur alteri ex CB in CF, & BM (*e*) erit ad CF, ut CB ad BO. Sed eſt CB dimidia (*f*) ipſius BO; ergo & BM dimidia erit CF.

Corollarium III.

In ellipſi vero & hyperbola ſi producatur tangens AE in O, ubi conveniat cum diametro; erit RO harmonice ſecta in C & B. Producantur OA, CA, donec in V & Z conveniant cum RZ. Quia æquantur (*g*) CE, ED, erit (*h*) RV ad CE, ut RV ad ED. Sed propter parallelas RV, CE, eſt (*i*) RV ad CE, ut RO ad OC, & ob triangulum DAE (*k*) ſimile VAR, eſt RV ad ED, ut RA ad AD, aut ut RB ad BC, ob triangulum ARB (*l*) ſimile DRC; ergo & RO erit ad OC, ut RB ad BC, ideoque RO harmonice ſecta (*m*) erit in C & B.

Corollarium IV.

Hinc ſemilatus tranſverſum SC eſt media proportionalis inter SB & SO. Cum enim ſit (*n*) in ellipſi RO ad OC, ut RB ad BC, etiam (*o*) componendo, RO cum OC erit ad OC, ut RC ad BC, ſumptiſque dimidiis antecedentium, SO erit ad OC, ut SC

ad

(*a*) per conſtr.
(*b*) per pr. 34. l. 1.
(*c*) per cor. 1. pr. 8. l. 6. & per pr. 17. l. 6.
(*d*) per cor. pr. 7.
(*e*) per pr. 16. l. 6.
(*f*) per cor. 1. hujus pr.
Tab. III. *Fig.* 8.
Tab. IV. *Fig.* 1.
(*g*) per conſtr.
(*h*) per pr. 7. l. 5.
(*i*) per cor. 1. pr. 4. l. 6.
(*k*) per eand.
(*l*) per eand.
(*m*) per def. 10.
(*n*) per cor. 3.
(*o*) per pr. 18. l. 5.

(a) per cor. 1. pr. 18. l. 5. ad CB, & (a) denique convertendo, SO erit ad SC, ut eadem SC ad SB. In hyper-
(b) per cor. 3. bola autem cum ſit (b) RB ad BC, ut RO ad OC, etiam (c) componendo, RB cum
(c) per pr. 18. l. 5. BC erit ad BC, ut RC ad OC, ſumptiſque dimidiis antecedentium, SB erit ad BC, ut
(d) per cor. 1. pr. 18. l. 5. SC ad OC, & (d) denique convertendo, erit SB ad SC, ut SC ad SO.

COROLLARIUM V.

In ellipſi itaque & hyperbola quadratum ſe-
(e) per pr. 17. l. 6. milateris tranſverſi SC æquabitur (e) rectangulo OSB.

COROLLARIUM VI.

Quin & rectangulum SBO æquabitur RBC. Nam in ellipſi quadratum SC æqua-
(f) per cor. 5. tur (f) rectangulo OSB, ſive (g) quadrato
(g) per pr. 3. l. 2. BS una cum rectangulo SBO. Sed idem SC quadratum æquatur quoque (h) quadrato BS
(h) per pr. 5. l. 2. una cum rectangulo RBC; ergo BS quadratum una cum rectangulo SBO æquatur BS quadrato una cum rectangulo RBC, & dempto utrinque BS quadrato, rectangulum SBO æquale erit rectangulo RBC. In hyperbola
(i) per pr. 2. l. 2. vero quadratum SB æquale eſt (i) rectangulis ſimul BSO, SBO. Sed idem SB qua-
(k) per pr. 6. l. 2. dratum æquatur (k) quoque quadrato SC una cum rectangulo RBC; ergo duo ſimul rectangula BSO, SBO æqualia erunt quadrato SC una cum rectangulo RBC. Quadratum autem
(l) per cor. 5. SC æquatur (l) rectangulo BSO; ergo & reliquum rectangulum SBO æquabitur reliquo RBC.

COROLLARIUM VII.

(m) per cor. 1. pr. 10. Cum rectangulum RBC ſit (m) ad ordinatæ AB quadratum, ut tranſverſum latus CR ad rectum CF, etiam rectangulum SBO erit
(n) per cor. 6. (n) ad ordinatæ AB quadratum, ut tranſverſum latus ad rectum.

Co-

COROLLARIUM VIII.

Si diameter CR ſit axis ellipſeos aut hyperbolæ, cujus latus rectum CF; ducta ad AE perpendiculari AM, quæ axi occurrat in M, erit SB ad ſubnormalem BM, ut CR ad CF. Nam rectangulum SBO eſt (*a*) ad ordinatæ AB quadratum, ut CR ad CF. Sed quia ex recto angulo OAM demiſſa eſt ad OM perpendicularis AB, eſt (*b*) quadratum AB æquale rectangulo MBO; ergo etiam rectangulum SBO erit ad rectangulum MBO, ut CR ad CF. Sed rectangulum SBO eſt (*c*) ad rectangulum MBO, ut SB ad MB; ergo & SB erit ad MB, ut CR ad CF.

(*a*) per cor. 7.
(*b*) per cor. 1. pr. 8. l. 6. & per pr. 17. l. 6.
(*c*) per pr. 1. l. 6.

PROPOSITIO XV.

Si recta AO quæ ellipſim aut hyperbolam tangit in puncto A, ſecet in E & V verticales tangentes CD, RZ; rectangulum ex CE in RV erit pars quarta rectanguli ex latere tranſverſo CR in rectum CF.

TAB. IV. Fig. 1. TAB. III. Fig. 2.

REctangulum RBC eſt (*d*) ad ordinatæ AB quadratum in ratione compoſita ex ratione RB ad BA, & ex ratione CB ad BA. Sed ob triangulum RDC (*e*) ſimile RAB, ratio RB ad BA eadem eſt ac ratio RC ad CD, & ob triangulum RCZ ſimile BCA, ratio CB ad BA eadem eſt ac ratio RC ad RZ; ergo rectangulum RBC eſt ad quadratum ordinatæ AB in ratione compoſita ex ratione RC ad CD, & ex ratione ejuſdem RC ad RZ, hoc eſt, ut (*f*) quadratum RC ad rectangulum ex CD in RZ. Sed idem rectangulum RBC eſt (*g*) etiam ad ordinatæ AB quadratum, ut RC ad CF, ſeu (ſumpta altitudine communi RC) ut quadratum RC

(*d*) per cor. 2. pr. 23. l. 6.
(*e*) per cor. 1. pr. 4. l. 6.
(*f*) per cor. 2. pr. 23. l. 6.
(*g*) per cor. 1. pr. 16.

Digitized by Google

ad rectangulum ex RC in CF; ergo quadra-
(a) per pr. 11. l. 5. tum RC erit (a) ad rectangulum ex CD in RZ, ut idem quadratum RC ad rectangulum ex RC in CF, ideoque rectangulum ex CD
(b) per pr. 9. l. 5. in RZ æquatur (b) rectangulo ex RC in CF. Demum cum parallelæ CD, RZ in eadem
(c) per lem. pr. 4. ratione ſint ſectæ (c) in E & V, ſitque CD
(d) per conſtr. bifariam (d) ſecta in E, etiam RZ biſecta erit in V; unde rectangulum ex CE in RV erit pars quarta rectanguli ex CD in RZ. Sed re-
(e) ex demonſtr. ctangulum ex CD in RZ æquatur (e) rectangulo ex RC in CF; ergo & rectangulum ex CE in RV erit pars quarta rectanguli ex RC in CF.

Propositio XVI.

Tab. IV. Fig. 2. Si recta EA, quæ ellipſim tangit in puncto E, occurrat axi BI in A, & ducta ordinata EI, ſuper BM diametro fiat ſemicirculus BOM, occurrens ipſi EI in O; juncta AO circulum tanget in puncto O.

Jungatur punctum O cum centro S circuli & ellipſis. Quia EA ellipſim in E tangit,
(f) per cor. 4. pr. 14. erit (f) AS ad BS, ut eadem BS ad IS. Verum BS eſt ipſi OS æqualis; ergo & AS erit ad OS, ut eadem OS ad IS. Circa communem ergo angulum S latera bina AS, OS trianguli ASO proportionalia ſunt binis OS, IS trianguli OSI; atque ita angulus AOS
(g) per pr. 6. l. 6. æquabitur (g) OIS. Sed cum ſit EI ordinata axi BI, rectus eſt (h) angulus OIS; ergo &
(h) per def. 7. rectus erit reliquus AOS, & AO circulum
(i) per pr. 16. l. 3. (i) tanget in puncto O.

PROPOSITIO XVII.

Si recta EA, quæ hyperbolam tangit in puncto E, occurrat axi BI in A, & ducta ordinata EI, ſuper BM diametro fiat ſemicirculus MOB, agaturque AO normaliter ad MB; juncta IO circulum tanget in puncto O. TAB. IV. Fig. 3.

JUngatur punctum O cum centro S circuli & hyperbolæ. Quia EA hyperbolam in E tangit, erit (a) IS ad BS, ut eadem BS ad AS. Verum BS eſt ipſi SO æqualis; ergo & SI erit ad SO, ut eadem SO ad AS. Circa communem ergo angulum S bina latera SI, SO trianguli IOS proportionalia ſunt binis SO, AS trianguli OAS; ideoque angulus IOS æquabitur (b) OAS. Rectus autem eſt angulus (c) OAS; ergo & rectus erit reliquus IOS, & IO circulum tanget (d) in puncto O.

(a) per cor. 4. pr. 14.
(b) per pr. 6. l. 6.
(c) per def. 7.
(d) per pr. 16. l. 3.

CAPUT IV.

De parabolæ foco ſeu umbilico.

DEFINITIO XII.

SI infra verticem G axis GR parabolæ DGI capiatur GF æqualis quartæ parti ejus parametri; vocabitur punctum F parabolæ *Focus* aut *Umbilicus*. TAB. IV. Fig. 4.

DEFINITIO XIII.

Si ducta ex foco F ordinata axi FT, agatur TQ, quæ curvam tangat in puncto T, & axi occurrat in Q, inde autem per Q traducatur

recta KN, ordinatæ FT parallela; eadem KN vocabitur *Directrix* parabolæ DGI.

Corollarium I.

(a) per cor. 1. pr. 4. (b) per def. 12.

Quoniam eſt FQ biſariam (a) ſecta in vertice axis N, hic æquidiſtabit a foco & a directrice, unde (b) etiam GQ quarta pars erit parametri axis GR.

Corollarium II.

Quia GF, GQ æquantur tum inter ſe, tum etiam parametri quartæ parti; liquet, FQ, quæ eſt diſtantia foci a directrice, eſſe parametri medietatem.

Propositio XVIII.

Tab. IV. *Fig.* 4.

Si ex quolibet puncto A parabolæ DGI agantur AS, AC, quarum altera curvam in A contingat, conveniatque cum axe GR in O, altera vero ſit parallela eidem axi; angulus FAO ſemper æqualis erit alteri CAS.

(c) per cor. 1. pr. 14. (d) per cor. 2. pr. 17. (e) per cor. 2. def. 13. (f) per pr. 31. l. 3. (g) per pr. 5. l. 1. (h) per pr. 27. l. 1.

Ducta ordinata AB, agatur AM perpendicularis tangenti AS, quæ axi in M occurrat. Quoniam ſunt æquales (c) GO, GB, nec non (d) GQ, GF, erunt quoque æquales OQ, FB. Eſt vero QF ipſi BM æqualis, cum utraque (e) parametri ſit medietas; ergo ſi æqualibus OQ, FB addantur hinc inde æquales QF, BM, fient æquales OF, FM; quare ſi centro F & radio FO circulus deſcribatur, tranſibit ipſe per punctum M, atque (f) per rectum angulum OAM, ideoque æquabuntur FO, FA, & angulus FAO æquabitur (g) FOA. Verum ob parallelas OR, AC, angulus FOA æqualis (h) eſt alteri CAS; ergo & angulus FAO æquabitur CAS.

Co-

COROLLARIUM I.

Hinc ſi parabolicum ſpeculum MARS convexitatem ita obvertat Soli, ut ejus radios, veluti QP, OV, excipiat parallelos axi AC; ipſi poſt reflexionem in P & V colligentur omnes ad focum F. Conſtat ſiquidem ex *Catoptrica*, radium lucis QP ita reflecti debere in P, ut angulus incidentiæ æquetur angulo reflexionis. Sed ducta IT tangente curvam in P, angulus incidentiæ eſt QPI; ergo cum iſti ſit æqualis (*a*) alter FPT, hic eſſe debet angulus reflexionis; ideoque radius QP reflexus tendet ad focum F. Cum vero id etiam competat radio OV, & aliis omnibus parallelis axi AC, itique tendent omnes ad focum F, ibique gnem, ob eorum concurſum mutuum excitaunt. En igitur rationem, cur punctum F vocetur focus aut umbilicus!

TAB. IV. *Fig.* 5.

(*a*) per hanc pr.

COROLLARIUM II.

Contra ſi fax candelæ poſita ſit in F, tunc ejus radii hinc inde emiſſi, atque in cavam ſuperficiem ſpeculi incidentes, veluti in P & V, poſt reflexionem pergent paralleli ſecundum rectas PQ, VO; ſic enim angulos incidentiæ facient æquales angulis reflexionis. Unde candelæ lumen collocatum in foco F, ad magnam diſtantiam eadem ſemper vi poterit propagari; quippe ob radiorum ſic reflexorum paralleliſmum, lux ad majora ſpatia lateraliter non diſpergitur, ſed velut collecta, eadem vi & denſitate moveri ſolet.

COROLLARIUM III.

Item ſi os loquentis collocetur in foco C parabolicæ tubæ VMKD, per longa intervalla ſonus poterit propagari. Nam phonici radii CK, CL, CM, CN emiſſi e puncto C, ita repercutientur in K, L, M, N, ut ſinguli incidentiæ & reflexionis anguli ſint æquales, quod

TAB. IV. *Fig.* 6.

quidem non obtinetur, niſi radii repercuſſi in (a) per hanc pr. illis punctis, incedant (a) per rectas KO, LF, MR, NS, parallelas axi CB; atque adeo ipſi per ampliora ſpatia lateraliter ſonum non diſſipabunt, ſed velut collectum eadem vi, & denſitate ad ingens intervallum poterunt promovere.

Corollarium IV.

Viciſſim etiam ſi auris poſitus ſit in foco, excipiet ſubmiſſas voces in magna etiam diſtantia colloquentium, cum hæ in foco velut collectæ & condenſatæ maxime intendantur. Hinc inſtrumentum quoddam inventum fuit, inſtar corniculi efformatum, quod fert ſurdaſtris eandem opem, quam ſenibus perſpicilla. Hujuſmodi Tab. IV. Fig. 7. eſt Machina AREO, cujus anterior pars AO latior cæteris eſſe ſolet, habetque parabolicam ſuperficiem AREO, cujus focus C. Prope hunc focum adnecti ſolet recurvus tubulus RBE, habens foramen anguſtum B, applicandum meatui auditorio. Incidens namque ſonus in cavam corniculi ſuperficiem, velut per lineas rectas parallelas ejuſdem axi, reflectitur (b) per cor. 1. (b) ab eadem ad focum C, ubi veluti condenſatus per tubum recurvum ad auditorium meatum tranſit, atque ita intenſior reddi ſolet.

Corollarium V.

Tab. V. Fig. 1. Nedum lux & ſonus ope ſpeculi parabolici intendi, & longius diffundi ſolent, verum & ipſa vis comburendi radiorum Solis ad intervalla maxima propagatur. Sit enim tubus parabolicus MNSQ verſus verticem ſic truncatus, ut focus ejuſdem D ſit poſitus extra tubum. Deinde ultra D ſtatuatur exiguus alter tubus parabolicus IFVR, truncatus pariter verſus verticem, qui cum priori habeat communem axem LO, & focum D. Quod ſi tubus MNSQ ita expoſitus Soli ſit ut, ejus radios, veluti

veluti AB, CG, excipiat parallelos axi LO, utique illos reflectet, colligetque (a) omnes ad focum D. Hi autem radii contrario ſitu ex foco D incidentes in cavitatem tubuli IFUR, exibunt omnes poſt reflexionem (b) paralleli eidem axi, magiſque juncti & condenſati, quam cum ingrederentur priorem tubum MNSQ. Verum cum uſtio nedum fiat in mathematico puncto D, ſed aliquantulum etiam remote a D, ubi nimirum radii ſunt denſiores, vegetiores, & quaſi igniti, poterunt ipſi, præcipue quando eſt valde exiguus tubus IFVR, eundem conſtipationis & denſitatis gradum ad diſtantiam maximam conſervare, atque adeo per eandem comburendi vim propagare.

(a) per cor. 1.

(b) per cor. 2.

PROPOSITIO XIX.

Si aliqua recta HP ita cadat in convexitatem parabolæ MAR, ut producta tendat ad focum F, & ducta ex puncto P tangente IT, agatur PG parallela axi AC; angulus HPI ſemper æqualis erit alteri GPT. Tab. IV. Fig. 5.

PRoducatur GP in Q. Quoniam recta IT parabolam tangit in puncto P, angulus FPT æquabitur (c) QPI. Sed angulus FPT eſt æqualis (d) alteri HPI, & angulus QPI alteri GPT; ergo etiam angulus HPI æquabitur GPT.

(c) per pr. 18.

(d) per pr. 15. l. 1.

COROLLARIUM I.

Hinc ſi radius lucis HP ita in ſuperficiem convexam cadat parabolici ſpeculi MARS, ut vergat & dirigatur ad focum F, ipſe poſt reflexionem perget per PG parallelam axi AC; ſic enim incidentiæ angulus HPI fiet æqualis (e) reflexionis angulo GPT.

(e) per hanc pr.

Corollarium II.

Quare vis comburendi radiorum Solis poterit propagari ad quemlibet datum locum, etiam ab axe ſpeculi valde diſſitum. Quippe ad id præſtandum unice opus eſt, ut ante focum D trun-
Tab. V. Fig. 2. cati ſpeculi AGFC ſtatuatur exiguum aliud convexum ſpeculum parabolicum SBM, quod habeat focum eodem in puncto D, & circa D pro lubitu verti queat. Tunc enim ſi vis comburendi ſit transferenda ad locum P, ſatis eſt ſi circa punctum D ita revolvatur exiguum ſpeculum SBM, ut axis ejus DB vergat & dirigatur ad punctum P. Paralleli ſiquidem Solis radii, veluti HO, RQ, incidentes in ſuperficiem concavam ſpeculi AGFC, dirigentur & vergent (a) omnes ad focum D. Sed cum ita convergentes incidant in ſuperficiem convexam alterius ſpeculi SBM, utique omnes plurimum condenſari reflecti (b) debent paralleli axi DB; ideoque vim combuſtivam transferent uſque ad P. Unde facile intelligitur quod plures fide digni Auctores tradunt, ſcilicet Archymedem Romanorum Naves prope Syracuſas, & Proclum Vitaliani Claſſem prope Bizantium combuſſiſſe. Non equidem puto ejuſmodi comburendi vim tantam eſſe, quanta in foco D, ubi eſt perfecta unio radiorum, ſed eam ſolum, quæ convenit iis radiis plurimum condenſatis, & ad perfectam unionem jam properantibus, quæ ſane vis comburendi ſufficiens per ſe eſt ad animalia, & alia corpora non arctæ admodum contexturæ penitus concremanda.

(a) per cor. 1. pr. 18.

(b) per cor. 1.

PROPOSITIO XX.

Quælibet recta AF, ducta ex quovis parabolæ puncto A ad focum F, æqualis eſt ipſi AP, perpendiculariter ductæ ad directricem. Tab. V. Fig. 3.

ORdinata axi AB, & ducta tangente AO, erunt (*a*) æquales GO, BG, quibus ſi addantur hinc inde (*b*) æquales GF, GQ, prodibunt quoque æquales FO, BQ. Porro eſt AF ipſi FO (*c*) æqualis, & AP (*d*) ipſi BQ; ergo æquabuntur quoque AF, AP.

COROLLARIUM I.

Igitur recta AP, quæ eſt diſtantia puncti A a directrice, æquabitur ipſi FO, diſtantiæ foci F ab occurſu tangentis O; utraque enim æqualis (*e*) eſt ipſi AF.

COROLLARIUM II.

Ideo juncta FP biſecabit tangentem AO in H, & contra. Nam ob parallelas OF, PA, triangulum OHF eſt (*f*) ſimile PHA, unde ut FO ad AP, ita erit FH ad HP, & OH ad HA. Sunt vero æquales (*g*) FO, AP; ergo & æquabuntur FH, HP, atque OH, HA.

COROLLARIUM III.

Quin rectæ FP, AO ſe ſe ad angulos rectos ſecant. Quippe tria latera AF, FH, HA trianguli FHA æquantur (*h*) tribus lateribus AP, PH, HA trianguli PHA; ergo angulus FHA æquabitur (*i*) PHA, ideoque FP, AO ſe ſe ad angulos rectos ſecant.

COROLLARIUM IV.

Denique recta HG, quæ jungit punctum H cum vertice axis G, erit ad rectos angulos ipſi OF. Cum enim rectæ OB, OA biſectæ (*k*) ſint in G & H, erit OG ad GB, ut OH ad HA; unde erunt (*l*) parallelæ GH, BA,

& an-

(*a*) per cor. 1. pr. 14.
(*b*) per cor. 1. def. 13.
(*c*) per pr. 18.
(*d*) per pr. 34. l. 1.
(*e*) per hanc pr.
(*f*) per pr. 4. l. 6.
(*g*) per cor. 1.
(*h*) per hanc pr. & ejus cor. 2.
(*i*) per pr. 8. l. 1.
(*k*) per cor. 1. pr. 14. & per cor. 2. huj.
(*l*) per pr. 2. l. 6.

(*a*) per pr. 27. l. 1. & angulus OGH æquabitur (*a*) OBA. Eſt autem rectus angulus OBA, quia GB eſt axis; igitur rectus erit & reliquus OGH.

COROLLARIUM V.

Hinc datis poſitione axe AB, & parametro magnitudine, continuo motu parabola deſcribetur. Infra & ſupra verticem axis A capiantur AF, AI ſingulæ æquales parametri quartæ parti, agaturque DIE ipſi IB normalis, eritque F focus (*b*), & DE directrix (*c*) parabolæ deſcribendæ. Deinde ipſi DE applicata regula DH, ſumatur filum CMF, cujus una extremitas ſit fixa in foco F, altera vero in termino C alterius regulæ GEC; longitudo autem ejuſdem fili æquari debet rectæ IB aut EC. Quod ſi applicato ſtylo M ad regulam GEC, hæc promoveatur juxta ductum regulæ immotæ DH, ſtylus quæſitam parabolam deſignabit.

Tab. V. *Fig.* 4.

(*b*) per def. 12.

(*c*) per cor. 1. def. 13.

Cum enim longitudo fili CMF ſit (*d*) ipſi EC æqualis, utique utrinque ablata CM, remanebunt ſemper æquales MF, ME. Eſt vero F focus parabolæ deſcribendæ, & DE directrix, cui eſt normalis recta ME; igitur punctum M ad quæſitam parabolam (*e*) pertinebit.

(*d*) per conſtr.

(*e*) per pr. 20.

PROPOSITIO XXI.

Tab. V. *Fig.* 5. In quavis parabola LCT, ſi ducta ex foco F ordinata axi FM, agantur MG, CO, quarum altera curvam tangat in puncto M, altera in vertice axis C; erunt æquales tam rectæ MF, FG, quam rectæ OC, CF.

(*f*) per def. 13. TRaducta (*f*) directrice KN per G, in ipſam cadat perpendicularis MS, cui æquabitur (*g*) recta MF. Sed in parallelogrammo MSGF ſunt (*h*) quoque æquales MS, FG; ergo æquabuntur etiam MF, FG. Verum ob pa-

(*g*) per pr. 20.

(*h*) per pr. 34. l. 1.

parallelas (*a*) OC, MF, eſt OC ad CG, (*b*) ut MF ad FG; ergo cum ſint æquales MF, FG, etiam æquabuntur OC, CG. Eſt autem CG ipſi CF (*c*) æqualis; ergo æquales erunt quoque OC, CF.

(*a*) per cor. 1. pr. 15.
(*b*) per cor. 1. pr. 4. l. 6.
(*c*) per cor. 1. def. 13.

COROLLARIUM.

Quoniam FG medietas (*d*) eſt parametri, etiam ordinata ex foco FM dimidia ejuſdem erit.

(*d*) per cor. 2. def. 13.

PROPOSITIO XXII.

Iiſdem poſitis, ſi ordinetur axi quælibet alia LR, occurrens tangenti MG in V; juncta FL æquabitur ipſi VR.

DEmiſſa perpendiculari LH ad directricem, æquales (*e*) erunt LH, RG. Eſt (*f*) vero FL ipſi LH æqualis; ergo & FL æquabitur ipſi RG. Porro ob parallelas VR, MF, eſt (*g*) VR ad RG, ut MF ad FG; ergo cum ſint æquales (*h*) MF, FG, etiam æquabuntur VR, RG. Vidimus autem æquari FL, RG; ergo & æquales erunt FL, VR.

(*e*) per pr. 34. l. 1.
(*f*) per pr. 20.
(*g*) per cor. 1. pr. 4. l. 6.
(*h*) per pr. 21.

CAPUT V.

De parabolæ diametris ſecundariis.

LEMMA.

SI tres parallelæ AD, BE, CF junctæ ſint binis rectis AC, DF, convenientibus mutuo ad punctum O; erit AB ad BC, ut DE ad EF.

TAB. V. Fig. 6. 7. 8.

Agatur AF, occurrens ipſi BE in H. Quia eſt BH parallela lateri CF trianguli ACF, erit

Digitized by Google

(a) per pr. 2. l. 6. erit (a) AB ad BC, ut AH ad HF. Verum ob HE parallelam lateri AD trianguli AFD,
(b) per eand. eſt (b) DE ad EF, ut AH ad HF; ergo etiam AB erit (c) ad BC, ut DE ad EF.
(c) per pr. 11. l. 5.

Propositio XXIII.

Tab. VI. Fig. 1. 2. Omnis recta, ut EP, parallela tangenti DK, & utrinque parabola terminata, biſariam in L ſecatur a recta DN, quæ ex contactu D ducta eſt parallela axi QI.

Producta DN uſque ad directricis occurſum A, agatur ad focum F recta AF, quæ occurrat tangenti DK in T, & rectæ EP in G. Deinde ex E & P demittantur ad directricem perpendiculares EC, PM, quæ erunt parallelæ
(d) per pr. 29. l. 1. tum (d) inter ſe, tum rectæ LA, & reſpecti-
(e) per pr. 20. ve æquales (e) ipſis EF, PF. Demum centro E per C deſcribatur circulus CFH, qui ob re-
(f) per pr. 16. l. 1. ctum angulum ECA, tangetur (f) a recta CA in C, rurſuſque occurret ipſi AF in H. Quia recta TG ſecat parallelas DK, EP, re-
(g) per cor. 3. pr. 20. ctuſque eſt (g) angulus DTG, etiam rectus (h) erit reliquus EGT; ideoque EG ducta ex
(h) per pr. 27. l. 1. centro E circuli CFH, erit normalis ejus chordæ FH, quam ideo (i) biſecabit in puncto
(i) per pr. 3. l. 3. G; quapropter junctæ PF, PH mutuo (k)
(k) per pr. 4. l. 1. æquabuntur. Sed eſt PF ipſi PM (l) æqualis;
(l) per pr. 20. igitur ſunt æquales PF, PH, PM, & circulus radio PH deſcriptus tranſibit quoque per M & F, atque ob rectum angulum PMA,
(m) per pr. 16. l. 1. tangetur (m) ab ipſa AM in M. Cum ergo CA, AM tangant in C & M circulos CFH, MFH, quos AF ſecat in F & H, ſingula
(n) per pr. 36. l. 3. quadrata CA, AM æqualia erunt (n) eidem rectangulo HAF, unde æquabuntur etiam inter ſe, atque adeo & rectæ CA, AM. Verum ob

ob parallelas EC, LA, PM, eſt (*a*) EL ad LP, ut CA ad AM; ergo cum ſint æquales CA, AM, etiam æquabuntur EL, LP, ac proinde EP biſecta erit in L. (*a*) per lem. præc.

COROLLARIUM.

In parabola itaque EQR quælibet recta DN parallela axi QI, erit diameter *Secundaria*, cui ordinabuntur lineæ rectæ omnes, utrinque parabola terminatæ, & parallelæ tangenti curvam in puncto D.

LEMMA.

Si recta AF ſit dupla TF, & FH dupla FG; etiam AH dupla erit TG. Tab. VI. Fig. 3. 4. 5.

Id per ſe liquet, quando eſt AF minor AH; at ubi eſt AF major AH, ſequenti methodo demonſtratur. Quia eſt AF dupla TF, & HF dupla GF, differentia rectarum AF, HF æquabitur differentiæ dupli TF a duplo GF. Sed differentia rectarum AF, HF eſt ipſa AH, & differentia dupli TF a duplo GF eſt duplum TG; ergo & AH dupla erit TG.

PROPOSITIO XXIV.

Si ab uno extremo E ordinatæ EP demittatur EN perpendicularis diametro ſecundariæ DN; erit EN quadratum æquale rectangulo ex abſciſſa DL in parametrum axis QI. Tab. VI. Fig. 1. 2.

Quia triangula ABF, FTK, præter communem angulum F, habent quoque rectos ſeu æquales angulos B & T, erunt (*b*) quoque ſimilia inter ſe, & FA erit ad FB, ut FK ad FT. Verum ob parallelas DK, OG, ut FK ad FT, ita eſt (*c*) quoque FO ad FG, ſive (*d*) KO ad TG; ergo (*e*) etiam FA erit ad FB, ut KO ad TG, & FA ad duplum FB, ut KO ad duplum TG. Porro cum

(*b*) per pr. 4. l. 6.
(*c*) per eand.
(*d*) per pr. 12. l. 5. & per pr. 2. l. 6.
(*e*) per pr. 11. l. 5.

(a) per cor. 1. pr. 20. cum ſit AF dupla (a) TF, & HF dupla (b) GF, erit AH (c) dupla TG; ergo & FA erit

(b) per pr. 23. ad duplum FB, ut KO ad AH. Verum in parallelogrammo LDKO eſt KO æqualis (d)

(c) per lem. præc. ipſi DL, & duplum FB æquatur (e) parame-

(d) per pr. 34. l. 1. tro axis QI; ergo FA erit ad parametrum axis

(e) per cor. 2. def. 13. QI, ut DL ad AH, atque rectangulum (f) FAH æquale erit rectangulo ex DL in parametrum axis QI. Vidimus autem idem rectan-

(f) per pr. 16. l. 6. gulum FAH æquari (g) quadrato CA vel (h)

(g) per pr. 33. EN; ergo EN quadratum æquale erit rectan-

(h) per pr. 34. l. 1. gulo ex abſciſſa DL in parametrum axis QI.

Propositio XXV.

Tab. VI. Fig. 6. Quadrata rectarum EL, BR, quæ ordinantur diametro ſecundariæ DN, ſunt ut abſciſſæ DL, DR ab ejus vertice computatæ.

Agantur EN, BS perpendiculares diametro ſecundariæ, axis autem parameter ſit GH:

(i) per pr. 24. Quia EN quadratum æquatur (i) rectangulo ex DL in GH, atque BS quadratum rectangulo ex DR in GH; erit EN quadratum ad quadratum BS, ut rectangulum ex DL in

(k) per pr. 1. l. 6. GH ad rectangulum ex DR in GH, ſive (k) ut DL ad DR. Sed ob triangulum ELN ſi-

(l) per pr. 4. l. 6. mile (l) BRS, eſt EL ad BR, ut EN ad BS, & quadratum EL ad quadratum BR, ut

(m) per pr. 22. l. 6. (m) quadratum EN ad quadratum BS; ergo etiam EL quadratum erit ad quadratum BR, ut abſciſſa DL ad abſciſſam DR.

Scholion.

(n) per pr. 6. Quia ſicut in diametro primigenia (n), ita

(o) per hanc pr. & in qualibet (o) ſecundaria quadrata ordinatarum ſunt, ut abſciſſæ a vertice computatæ; patet, ea omnia quæ oſtendimus circa parametrum, & tangentem reſpectu diametri primi-

ge-

geniæ, etiam habere locum in ſecundaria. Sicuti ergo parameter GH diametri primigeniæ GI eſt (*a*) tertia proportionalis poſt abſciſſam GK, & ordinatam DK, ita & parameter diametri ſecundariæ DN erit tertia proportionalis poſt abſciſſam DR & ordinatam BR. Et ſicuti tangens DO, ducta ex termino D ordinatæ DK, diametro primigeniæ GI ſic occurrit, ut ſint (*b*) æquales KG, GO, ita tangens BQ, ducta ex termino B ordinatæ BR, ſic occurret diametro ſecundariæ DN, ut ſint æquales RD, DQ.

Tab. VI. *Fig. 7.*

(*a*) per cor. 2. pr. 7.

(*b*) per cor. 1. pr. 16.

Propositio XXVI.

Si diametro ſecundaria DN producta uſque ad directricis occurſum A, agatur ex vertice axis G recta GE parallela tangenti DO; erit ordinatæ EL quadratum æquale rectangulo ex abſciſſa DL in quadruplum rectæ DA.

Tab. VI. *Fig. 6.*

Ducta ex foco F recta FA, quæ conveniat cum tangente in puncto T, jungatur GT, quæ erit normalis (*c*) axi GI, & curvam tanget (*d*) in vertice ejus G. Quia rectus (*e*) eſt angulus FTO, eſtque TG ipſi FO normalis, erit OT quadratum æquale (*f*) rectangulo GOF. Sed ob (*g*) æquales OG, DL, nec non (*h*) FO, DA, rectangulum GOF æquatur alteri LDA; ergo etiam OT quadratum æquale erit rectangulo LDA. Sed cum DO ſit (*i*) dupla OT, eſt quadratum DO quadruplum quadrati OT; ergo & idem DO quadratum erit quadruplum rectanguli LDA, ſeu æquale rectangulo ex DL in quadruplum rectæ DA. Eſt autem DO æqualis (*k*) ipſi LG, aut (*l*) EL; ergo etiam EL qua-

(*c*) per cor. 4. pr. 20.

(*d*) per cor. 2. pr. 13.

(*e*) per cor. 3. pr. 20.

(*f*) per cor. 2. pr. 8. l. 6.

(*g*) per pr. 34. l. 1.

(*h*) per cor. 2. pr. 20.

(*i*) per cor. 2. pr. 20.

(*k*) per pr. 34. l. 1.

(*l*) per def. 6.

quadratum æquabitur rectangulo ex DL in quadruplum rectæ DA.

Corollarium I.

Hinc etiam quadratum cujuſcunque alterius ordinatæ BR æquale erit rectangulo ex abſciſſa DR in quadruplum rectæ DA. Eſt enim (a) EL quadratum ad BR quadratum, ut DL ad DR, ſive (b) ut rectangulum ex DL in quadruplum rectæ DA ad rectangulum ex DR in quadruplum rectæ DA. Verum EL quadratum eſt (c) æquale rectangulo ex DL in quadruplum rectæ DA; ergo (d) etiam BR quadratum æquale erit rectangulo ex DR in quadruplum rectæ DA.

(a) per pr. 25. (b) per pr. 1. l. 6. (c) per pr. 26. l. (d) per pr. 14. l. 5.

Corollarium II.

Si itaque ſit DC quadrupla rectæ DA, erit ipſa ſecundariæ diametri DN parameter. Cum enim cujuſvis ordinatæ BR quadratum ſit (e) æquale rectangulo ex abſciſſa DR in quadruplum rectæ DA, etiam æquale erit rectangulo ex abſciſſa DR in DC, ideoque DC erit (f) tertia proportionalis poſt abſciſſam DR & ordinatam BR, ac proinde (g) diametri DN parameter.

(e) per hanc pr. (f) per pr. 17. l. 6. (g) per cor. pr. 7.

Corollarium III.

Parameter ergo diametri cujuſcunque eſt quadrupla diſtantiæ ejuſdem verticis a directrice, ideoque axis parameter, quæ eſt (h) quadrupla ipſius GQ, minima erit omnium parametrorum.

(h) per cor. 1. def. 13.

C A-

Digitized by Google

CAPUT VI.

De diametris conjugatis ellipſeos, & hyperbolæ.

PROPOSITIO XXVII.

Si ex quolibet puncto N ellipſeos aut hyperbolæ agatur ad centrum C recta NC; hæc producta uſquedum iterum curvæ occurrat, ſecabitur bifariam eodem in puncto C. TAB. VII Fig. 1. 2.

DUcta ordinata NF, capiatur CP ipſi PF æqualis, & rurſus ducta ordinata altera PM, jungatur CM. Cum igitur (a) ſint æquales CP, CF, necnon CA, CQ, erunt quoque æquales AP, QF, atque QP, AF, unde rectangulum APQ æquabitur alteri AFQ. Verum PM quadratum eſt (b) ad FN quadratum, ut rectangulum APQ ad aliud AFQ; ergo cum hæc rectangula ſint æqualia, æquabuntur quoque quadrata PM, FN, rectæque ipſæ PM, FN; ideoque duo latera CP, PM trianguli MCP æqualia erunt duobus CF, FN trianguli FCN. Sed propter parallelas PM, FN, etiam angulus CPM æquatur (c) alteri CFN; ergo etiam CM æquabitur (d) ipſi CN, & angulus MCP alteri NCF, unde utrinque addito angulo MCF, duo anguli MCP, MCF æquabuntur duobus NCF, MCF. Sed duo primi conficiunt (e) duos rectos; ergo & duos rectos facient poſteriores, atque adeo recta erit linea NCM. Vidimus autem æquales eſſe NC, CM; ergo NC producta uſquedum iterum curvæ occurrat, bifariam ſecta erit in centro C.

(a) per conſtr.
(b) per pr. 9.
(c) per pr. 27. l. 1.
(d) per pr. 4. l. 1.
(e) per pr. 13. l. 1.

Corollarium. I.

Quare ſi ducta per centrum C qualibet recta NM, agantur ab ejus terminis ordinatæ NF, MP, ipſæ abſcindent ex diametro æquales partes CF, CP.

Corollarium II.

Producta ordinata NF in G, æquales erunt & parallelæ PM, FG, atque adeo juncta MG æqualis erit (*a*), & parallela ipſi PF.

(*a*) per pr. 33. l. 1.

Corollarium III.

Si ergo per centrum C agatur BD parallela ad ordinatas PM, FG, biſecabit ipſa rectam MG in E. Nam, quia eſt CE parallela lateri NG trianguli MNG, erit (*b*) ME ad EG, ut MC ad CN; ergo cum ſint (*c*) æquales MC, CN, etiam æquabuntur ME, EG.

(*b*) per pr. 2. l. 6. (*c*) per hanc pr.

Corollarium IV.

Cum ſimili modo conſtet, eandem BD etiam biſecare in R rectam IO, jungentem terminos æqualium ordinatarum KI, SO; patet BD eſſe diametrum, cui ordinantur MG, IO, & aliæ rectæ omnes, quæ jungunt terminos æqualium ordinatarum, quæque proinde ſunt (*d*) parallelæ diametro tranſverſæ AQ.

(*d*) per pr. 33. l. 1.

Scholion.

Diameter hæc BD dicitur *Conjugata* diametri tranſverſæ AQ. At ſi prima ad rectos angulos aliam ſecet, vocatur illa *Axis conjugatus* alterius axis tranſverſi AQ.

Propositio XXVIII.

Tab. VII Fig. 1. 2. Si ex terminis rectæ NM trajectæ per centrum C, agantur tangentes MT, NH, quæ diametro occurrant in T & H, ipſæ æquales erunt, & mutuò parallelæ.

Quia MT curvam tangit in M, quadratum CA æquale (*e*) erit rectangulo PCT. Pari modo conſtabit, quadratum etiam CQ æqua-

(*e*) per cor. 5. pr. 14.

æquari rectangulo FCH. Sunt vero æqualia quadrata CA, CQ; ergo & rectangulum PCT æquabitur FCH. Verum eſt CP ipſi (*a*) CF æqualis; ergo & æquabuntur CT, CH. Latera itaque MC, CT trianguli MCT æqualia ſunt lateribus NC, CH trianguli NCH. Eſt autem angulus MCT æqualis (*b*) alteri NCH; ergo etiam æquabuntur (*c*) MT, NH, & angulus CMT æquabitur CNH, unde erunt (*d*) parallelæ MT, NH.

(*a*) per cor. 1. pr. 27.
(*b*) per pr. 15. l. 1.
(*c*) per pr. 4. l. 5.
(*d*) per pr. 29. l. 1.

PROPOSITIO XXIX.

Diameter conjugata BD in ellipſi eſt media proportionalis inter tranſverſum AQ, & parametrum ejus AV.

TAB. VII. Fig. 1.

RECtangulum ACQ, ſive AC quadratum eſt (*e*) ad ordinatæ CD quadratum, ut AQ ad AV; ergo & quadruplum quadrati AC erit ad quadruplum quadrati CD in eadem ratione AQ ad AV. Verum AQ quadratum eſt quadruplum quadrati AC, & quadratum BD quadruplum quadrati CD; ergo & AQ quadratum erit ad quadratum BD, ut AQ ad AV, ideoque AQ, BD, AV erunt (*f*) continue proportionales, & BD media inter AQ & AV.

(*e*) per cor. 1. pr. 10.
(*f*) per lem. pr. 14.

SCHOLION.

Quamvis longitudo diametri conjugatæ ſit determinata in ellipſi ab ejus perimetro, non ita tamen accidit in hyperbola, in qua eſt prorſus indefinita. Ut vero etiam ipſa determinetur, per hyperbolæ centrum C ducenda eſt BD quæ ſit media proportionalis inter diametrum tranſverſam AQ & parametrum ejus AV, eaque ita diſponi debet, ut ſit parallela ordinatis

TAB. VII. Fig. 2.

 dia-

diametro tranſverſæ AQ, & bifariam ſecta in centro C.

Corollarium I.

Igitur in ellipſi & in hyperbola quadratum diametri conjugatæ BD æquabitur rectangulo ex latere tranſverſo AQ in rectum AV (*a*); & quadratum ſemidiametri conjugatæ CD erit pars quarta rectanguli ex latere tranſverſo AQ in rectum AV.

(*a*) Per pr. 17. l. 6.

Corollarium II.

In hyperbola igitur æquilatera diameter conjugata eſt lateri tranſverſo æqualis. Nam ſi hyperbola AMI fuerit æquilatera, erit AQ (*b*) ipſi AV æqualis, unde rectangulum ex AQ in AV æquabitur quadrato AQ; ideoque BD quadratum (*c*) æquabitur quadrato AQ, & BD ipſi AQ.

(*b*) per cor. 11. pr. 10.
(*c*) per cor. 1.

Propositio XXX.

Tab. VII. Fig. 1. 2.

In ellipſi & hyperbola quodvis rectangulum APQ eſt ad ordinatæ PM quadratum, ut quadratum ſemidiametri tranſverſæ CA ad illud ſemidiametri conjugatæ CD.

Rectangulum APQ eſt (*d*) ad ordinatæ PM quadratum, ut AQ ad AV. Sed quia AQ eſt ad BD, ut BD ad AV (*e*), erit AQ ad AV, ut (*f*) quadratum AQ ad quadratum BD; ergo etiam rectangulum APQ erit ad quadratum ordinatæ PM, ut quadratum AQ ad quadratum BD, ſive ut quarta pars quadrati AQ ad quartam partem quadrati BD, aut ut quadratum CA ad quadratum CD.

(*d*) per cor. 1. pr. 10.
(*e*) per pr. 29. & ejus ſchol.
(*f*) per cor. 2. pr. 20. l. 6.

Digitized by Google

PROPOSITIO XXXI.

Quadrata rectarum ME, IR quæ ordinantur diametro conjugatæ BD, ſunt in hyperbola, ut ſumma quadratorum CE, CD ad ſummam quadratorum CR, CD. TAB. VII. Fig. 2.

Rectangulum QPA eſt (a) ad quadratum ordinatæ PM aut (b) CE, ut quadratum CA ad quadratum CD; igitur ſumma antecedentium, nempe rectanguli QPA & CA quadrati, erit (c) ad ſummam conſequentium ſeu quadratorum CE, CD, ut unum antecedens ad ſuum conſequens, ſive ut quadratum CA ad quadratum CD. Sed cum AQ biſariam ſecta ſit in C, eique addita ſit AP, ſumma rectanguli QPA & quadrati CA æquatur (d) quadrato PC vel (e) ME; ergo & ordinatæ ME quadratum erit ad ſummam quadratorum CE, CD, ut quadratum CA ad quadratum CD. Simili modo oſtendam, eſſe ordinatæ IR quadratum ad ſummam quadratorum CR, CD, ut idem quadratum CA ad quadratum CD; ergo ordinatæ ME quadratum erit (f) ad ſummam quadratorum, CE, CD, ut ordinatæ IR quadratum ad ſummam quadratorum CR, CD, & (g) permutando, quadrata ordinatarum ME, IR inter ſe erunt, ut ſumma quadratorum CE, CD ad ſummam quadratorum CR, CD.

(a) per pr. 30.
(b) per pr. 34. l. 1.
(c) per pr. 12. l. 5.
(d) per pr. 6. l. 2.
(e) per pr. 34. l. 1.
(f) per pr. 11. l. 5.
(g) per pr. 16. l. 5.

Propositio XXXII.

Tab. VII. Fig. 1.

Quadrata rectarum ME, IR, quæ ordinantur diametro conjugatæ BD, ſunt in ellipſi, ut rectangulum BED ad rectangulum BRD.

Quoniam eſt AQ biſecta in centro C, & non bifariam ſecta in P, erit quadratum CA æquale (a) quadrato CP una cum rectangulo APQ. Simili modo conſtat, eſſe CD quadratum æquale quadrato CE una cum rectangulo BED. Hoc autem poſito, ſic oſtenditur propoſitio. Quadratum CA eſt (b) ad quadratum CD, ut rectangulum APQ ad quadratum PM vel (c) CE, & (d) permutando, quadratum CA erit ad rectangulum APQ, ut quadratum CD ad quadratum CE; igitur (e) convertendo, quadratum CA erit ad reliquum quadratum PC vel (f) ME, ut quadratum CD ad reliquum rectangulum BED, & (g) iterum permutando, quadratum CA erit ad quadratum CD, ut quadratum ME ad rectangulum BED. Pari modo conſtabit, quadratum CA eſſe ad quadratum CD, ut quadratum IR ad rectangulum BRD; ergo ME quadratum erit ad rectangulum BED (h), ut IR quadratum ad rectangulum BRD, & (i) permutando, quadrata ordinatarum ME, IR inter ſe erunt, ut rectangulum BED ad rectangulum BRD.

(a) per pr. 5. l. 2.
(b) per pr. 30.
(c) per pr. 34. l. 1.
(d) per pr. 16. l. 5.
(e) per cor. pr. 18. l. 5.
(f) per pr. 34. l. 1.
(g) per pr. 16. l. 5.
(h) per pr. 11. l. 5.
(i) per pr. 16. l. 5.

Scholion.

Quia ut in diametro tranſverſa AQ, ita & in ejus conjugata BD quadrata ordinatarum ſunt in ellipſi, ut rectangula, quæ diametri conjugatæ partibus continentur; patet, ea omnia quæ circa parametrum in tranſverſa diametro de-

demonſtravi, poſſe etiam conjugatæ diametro applicari. Itaque ſi fiat, ut rectangulum BED ad ordinatæ ME quadratum, ita diameter conjugata BD ad quartam proportionalem BL; hæc erit (a) parameter diametri conjugatæ BD. (a) per cor. 1. pr. 10.

Propositio XXXIII.

Diameter tranſverſa AQ in ellipſi eſt media proportionalis inter conjugatam BD & parametrum hujus BL. Tab. VII. Fig. 1.

Quadratum CA eſt (b) ad quadratum CD, ut quadratum ME ad rectangulum BED, & (c) invertendo, quadratum CD ad quadratum CA erit, ut rectangulum BED ad quadratum ME. Sed quadratum CD eſt ad quadratum CA, ut quadratum BD ad quadratum AQ, & rectangulum BED eſt (d) ad quadratum ME, ut BD ad BL; ergo & quadratum BD erit ad quadratum AQ, ut BD ad BL, unde BD, AQ, BL ſunt (e) in continua proportione, atque adeo AQ media erit proportionalis inter BD & BL. (b) per pr. 32. (c) per ſchol. pr. 16. l. 5. (d) per ſchol. pr. 32. (e) per lem. pr. 14.

Corollarium.

Ergo ſicut BD eſt (f) media proportionalis inter AQ & AV, ita etiam AQ media (g) eſt inter BD & BL; unde quemadmodum eſt BD diameter (h) conjugata ipſius AQ, ita & ipſa AQ erit diameter conjugata ipſius BD. (f) per pr. 29. (g) per pr. 33. (h) per ſchol. pr. 27.

Scholion.

Si veluti (i) in ellipſi, ita & in hyperbola poſt rectas BD, AQ inveniatur tertia proportionalis BL, indeque hac veluti recto latere, tranſverſo autem BD deſcribantur (k) hyperbolæ BZ, DX; hæ dicentur prioribus *conjugatæ*. Quippe BD, quæ eſt diameter conjugata reſpectu hyperbolarum AM, QN, tranſ- (i) per pr. 35. Tab. VII. Fig. 2. (k) per pr. 11.

verſa evadit relatę ad alias BZ, DX, & viciſſim.

CAPUT VII.

De ellipſis diametris ſecundariis.

LEMMA I.

Tab. II. Fig. 2. 3.

SI parallelæ GK, DC ita ſint ſectæ in H & E, ut GK ſit ad DC in ratione GH ad DE, rectæ autem illas jungentes GD, KC conveniant mutuo ad punctum A; etiam juncta EH tranſibit per punctum A.

(a) per hyp. (b) per pr. 16. l. 5. (c) per pr. 17. l. 5. (d) per ſchol. pr. 16. l. 5. (e) per lem. pr. 4.

Jungatur AH. Quia GK eſt (a) ad DC, ut GH ad DE, etiam (b) permutando, erit GK ad GH, ut DC ad DE, & (c) dividendo, KH ad HG, ut CE ad ED, & (d) invertendo, GH ad HK, ut DE ad EC. Sunt vero GK, DC mutuo parallelæ; ergo AH producta ſecabit (e) rectam DC in E, ideoque EH viciſſim tranſibit per punctum A.

LEMMA II.

Tab. VII. Fig. 3. 4. 5.

Si parallelæ AE, BF ita ſint ſectæ in C & D, ut AE ſit ad BF in ratione AC ad BD, inde vero per C & D ductæ ſint parallelæ CH, DK, quæ ipſi AB occurrant in H & K; etiam junctæ EH, FK erunt invicem parallelæ.

(f) per pr. 27. l. 1. (g) per eand. pr. (h) per pr. 4. l. 6. (i) per hyp. (k) per pr. 11. l. 5.

Quia ſunt parallelæ AC, BD, angulus CAH (f) æquabitur DBK. Sed propter parallelas CH, DK, etiam angulus CHA æqualis (g) eſt DKB; ergo triangulum ACH erit (h) ſimile BDK, & AH erit ad BK, ut AC ad BD. Sed etiam AE eſt (i) ad BF, ut AC ad BD; ergo (k) & AH erit ad BK, ut AE ad BF. Vidimus autem angulum EAH æquari alteri FBK; ergo etiam triangulum AEH

erit

erit (*a*) ſimile BFK, unde angulus E æquabitur ipſi F, & reliquus EHA reliquo FKB, ideoque ſunt (*b*) parallelæ EH, FK.

(*a*) per pr. 4. l. 6.
(*b*) per pr. 29. l. 1.

COROLLARIUM.

Unde triangulum CEH erit ſimile DFK. Nam ob parallelas EH, FK, angulus EHA (*c*) æquabitur FKB, & ob parallelas CH, DK, angulus CHA æquabitur (*d*) DKB; ergo & reliquus EHC erit æqualis reliquo FKD. Sunt vero æquales (*e*) anguli E & F; ergo triangulum CEH erit (*f*) ſimile DFK.

(*c*) per pr. 27. l. 1.
(*d*) per eand. pr.
(*e*) per lem. 2.
(*f*) per pr. 4. l. 6.

PROPOSITIO XXXIV.

Omnis recta, ut HG, parallela tangenti EF, & ellipſi utrinque terminata, biſariam in K ſecatur ab alia recta ET, trajecta per tactum E & centrum C.

TAB. VII. *Fig.* 6. & TAB. VIII. *Fig.* 1.

Super axem AB velut diametrum deſcripto circulo APBI, ex punctis H, E, G demittantur axi normales HO, EM, GN, circulo occurrentes in R, P, Q. Jungatur deinde FP quæ (*g*) circulum in P tanget, & ducta RQ conveniente cum radio CP in S, cum axe autem in L, jungatur SK. Quia ſunt parallelæ (*h*) RO, QN, eſtque (*i*) RO ad QN, ut OH ad NG, utique cum RQ occurrat ipſi ON in L, etiam HG (*k*) tranſibit per punctum L, unde ob parallelas (*l*) KL, EF, erit (*m*) CK ad KE, ut CL ad LF. Quia pariter parallelæ PM, QN ſunt inter ſe, ut (*n*) ME ad NG, atque ex E & G ductæ ſunt parallelæ EF; GL, etiam parallelæ erunt (*o*) PF, QL, ſive PF, SL, & CS erit (*p*) ad SP, ut CL ad LF. Vidimus autem etiam CK eſſe ad KE, in eadem ratione CL ad LF; ergo & CS erit (*q*) ad SP,

(*g*) per pr. 16.
(*h*) per pr. 29. l. 1.
(*i*) per pr. 12.
(*k*) per lem. 1.
(*l*) per hyp.
(*m*) per pr. 2. l. 6.
(*n*) per pr. 12.
(*o*) per lem. 2.
(*p*) per pr. 2. l. 6.
(*q*) per pr. 11. l. 5.

Digitized by Google

(a) per SP, ut CK ad KE, ideoque SK erit (a) pa-
pr. 2. l. 6. rallela ipſi PE, ac proinde & rectis RH,
(b) per QG, unde HK erit (b) ad KG, ut RS ad
lem. pr. 23. SQ. Sed quia eſt CP perpendicularis (c) tan-
(c) per pr. 16. l. 3. genti PF, ac proinde etiam (d) chordæ RQ,
(d) per pr. 27. l. 1. quam ſibi vidimus parallelam, utique æquabun-
(e) per tur (e) RS, SQ; ergo æquales erunt quoque
pr. 3. l. 3. HK, KG, atque adeo HG bifariam ſecta erit in puncto K.

Corollarium.

In ellipſi itaque AHBT quælibet recta ET traducta per centrum C, eſt diameter *Secundaria*, cui ordinabuntur lineæ rectæ omnes terminatæ utrinque a curva, ut parallelæ tangenti curvam in puncto E.

Propositio XXXV.

Iiſdem poſitis quæ in præcedenti propoſitione, ſi per ellipſeos centrum C agatur CV parallela ipſi KL, ſive tangenti EF; erit SQ ad KG, ut CP ad CV.

Ordinata axi VY quæ circulo occurrat in puncto Z, jungatur CZ. Cum ſint pa-
(f) per rallelæ (f) SK, QG, erit (g) SL ad QL,
pr. 34. ut KL ad GL, & (h) dividendo in figura
(g) per cor. 1. pr. 4. l. 6. prima, & in altera componendo, erit SQ ad QL, ut KG ad GL, & (i) permutando,
(h) per pr. 17. l. 5. SQ ad KG, ut QL ad GL. Rurſus quia
(i) per pr. 16. l. 5. parallelæ QN, ZY ſunt (k) inter ſe, ut GN ad VY, eſtque CV parallela ipſi GL, etiam
(k) per pr. 12. CZ parallela (l) erit QL, unde triangulum
(l) per lem. 2. CVZ erit (m) ſimile QGL, & CZ ad CV, ut QL ad GL. Vidimus autem, etiam SQ
(m) per cor. lem. 2. eſſe ad KG, ut QL ad GL; ergo SQ erit
(n) per pr. 11. l. 5. (n) ad KG, ut CZ ad CV, ſive ut CP ad CV.

COROLLARIUM.

Quia eſt SQ ad KG, ut CP ad CV, etiam quadratum *(a)* SQ erit ad quadratum KG, ut quadratum CP ad quadratum CV.

(a) per pr. 22. l. 6.

PROPOSITIO XXXVI.

Iiſdem manentibus, rectangulum EKT, a diametri partibus comprehenſum, erit ad ordinatæ KG quadratum, ut quadratum CE ad quadratum CV.

Quia eſt ET bifariam ſecta in C, & non bifariam in K, erit quadratum CE æquale *(b)* quadrato CK una cum rectangulo EKT. Eandem ob cauſam, quadratum CP æquabitur quadrato CS una cum rectangulo PSI. Hoc autem poſito, ſic oſtenditur propoſitio. Quia *(c)* ſunt parallelæ SK, PE, erit CE ad CK, ut *(d)* CP ad CS, & quadratum CE *(e)* ad quadratum CK, ut quadratum CP ad quadratum CS; igitur *(f)* convertendo, quadratum CE erit ad reliquum rectangulum EKT, ut quadratum CP ad reliquum rectangulum PSI, & *(g)* invertendo, rectangulum EKT ad quadratum CE, ut rectangulum PSI ad quadratum CP, & *(h)* permutando, rectangulum EKT erit ad rectangulum PSI ſive ad quadratum SQ *(i)*, ut quadratum CE ad quadratum CP. Sed quadratum SQ eſt *(k)* ad quadratum KG, ut quadratum CP ad quadratum CV; ergo ex æquo *(l)* rectangulum EKT erit ad quadratum KG, ut quadratum CE ad quadratum CV.

(b) per pr. 5. l. 5.
(c) per pr. 34.
(d) per cor. 1. pr. 4. l. 6.
(e) per pr. 22. l. 6.
(f) per cor. pr. 18. l. 5.
(g) per ſchol. pr. 16. l. 5.
(h) per pr. 16. l. 5.
(i) per cor. 1. pr. 17. l. 6.
(k) per cor. pr. 35.
(l) per pr. 22. l. 5.

PRO-

PROPOSITIO XXXVII.

Tab. VIII. Fig. 2.

In ellipſi qualibet AVE quadrata rectarum GK, OF, quæ ordinantur diametro ſecundariæ EA, ſunt inter ſe, ut rectangulum EKA ad aliud EFA.

Ducta ex centro C recta CV parallela ordinatis GK, OF, rectangulum EKA erit (a) ad ordinatæ GK quadratum, ut quadratum CE ad quadratum CV. Simili modo conſtat, in eadem quoque ratione eſſe rectangulum EFA ad ordinatæ OF quadratum; ergo rectangulum EKA erit (b) ad ordinatæ GK quadratum, ut rectangulum EFA ad ordinatæ OF quadratum, & (c) invertendo, quadratum ordinatæ GK ad rectangulum EKA, ut quadratum ordinatæ OF ad rectangulum EFA, & (d) permutando, quadratum ordinatæ GK erit ad quadratum ordinatæ OF, ut rectangulum EKA ad rectangulum EFA.

(a) per pr. 36.
(b) per pr. 11.
(c) per ſchol. pr. 16. l. 5.
(d) per pr. 16. l. 5.

SCHOLION.

Quia ſicut in diametro primigenia, ita & in qualibet ſecundaria quadrata ordinatarum ſunt ut rectangula quæ diametri partibus continentur; patet, ea omnia, quæ circa parametrum & tangentem oſtenſa ſunt in diametro primigenia, etiam habere locum in qualibet ſecundaria. Si ergo fiat, ut rectangulum EKA ad ordinatæ GK quadratum, ita EA ad quartam proportionalem EL; hæc erit (e) parameter diametri ſecundariæ EA. Et ſi ex termino G cujuſvis ordinatæ GK agatur tangens GD, quæ diametro ſecundariæ occurrat in puncto D; rectæ CK, CE, CD erunt continue (f) proportionales.

(e) per cor. 1. pr. 10.
(f) per cor. 4. pr. 14.

PRO-

PROPOSITIO XXXVIII.

Iiſdem poſitis, ſi VC producatur donec occurrat denuo curvæ in X erit VX media proportionalis inter diametrum ſecundariam EA, & parametrum ejus EL.

Quadratum EC eſt (*a*) ad quadratum CV, ut rectangulum EKA ad ordinatæ GK quadratum, ſive ut (*b*) EA ad EL. Sed quadratum EA eſt ad quadratum VX, ut quadratum EC ad quadratum CV; ergo & quadratum EA erit ad quadratum VX, ut EA ad EL, ideoque EA, VX, EL erunt (*c*) continue proportionales, & VX media inter EA & EL.

(*a*) per pr. 36.

(*b*) per ſchol. pr. 37.

(*c*) per lem. pr. 14.

COROLLARIUM I.

Itaque recta VX erit diameter (*d*) conjugata ipſius EA.

(*d*) per pr. 29.

COROLLARIUM II.

Quia quadratum EC eſt ad quadratum CV, ut rectangulum EKA ad ordinatæ GK quadratum, etiam quadratum ſemidiametri tranſverſæ erit ad illud ſemidiametri conjugatæ, ut rectangulum EKA ad ordinatæ GK quadratum.

CAPUT VIII.

De aſymptotorum hyperbolæ proprietatibus.

DEFINITIO XIV.

Si ex vertice N axis tranſverſi QN agatur tangens EF, quæ ſit æqualis conjugato axi Bb, & diviſa bifariam in puncto N; junctæ

TAB. VIII. *Fig.* 3.

ctæ CE, CF *Aſymptoti* vocabuntur hyperbolæ INL.

Corollarium I.

Quoniam recta EF hyperbolam tangit in (*a*) per cor. 1. pr. 13. vertice axis N, parallela (*a*) utique erit ad ordinatas eidem axi, atque adeo etiam (*b*) con- (*b*) per ſchol. pr. 29. jugato axi Bb.

Corollarium II.

Si hyperbola INL fuerit æquilatera, rectus erit aſymptoticus angulus ECF. Cum enim (*c*) per cor. 2. pr. 29. in hoc caſu (*c*) æquentur NQ, Bb, etiam æquales (*d*) erunt NQ, EF, & earum ſemiſ- (*d*) per hyp. ſes NC, NE, NF; unde ſi centro N & intervallo NE circulus deſcribatur, tranſibit ipſe (*e*) per pr. 31. l. 3. etiam per C & F, rectuſque prodibit (*e*) in ſemicirculo angulus ECF.

Corollarium III.

Si rectæ CE, CF productæ fuerint verſus C, aſymptoti quoque evadent hyperbolæ oppoſitæ QD. Per verticem enim Q ducta tangen- (*f*) per pr. 28. te TH, quæ (*f*) parallela erit ipſi EF, triangulum ECN erit (*g*) ſimile CQH, & NE (*g*) per pr. 4. l. 6. erit ad QH, ut NC ad CQ; ergo cum ſint æquales NC, CQ, etiam æquabuntur NE, QH. Simili modo liquet, æquales eſſe NF, QT; ergo etiam TH æqualis erit ipſi EF vel Bb, ideoque CH, CT aſymptoti quoque (*h*) per def. 14. erunt (*h*) hyperbolæ QD.

Pro-

Propositio XXXIX.

Si per quodlibet punctum O hyperbolæ INL traducta ſit recta GS parallela tangenti EF vel conjugato axi Bb, quæ aſymptotos ſecet in G & S, hyperbolam vero in O & R; rectæ GO, RS curva & aſymptoto interceptæ, mutuo æquabuntur.

QUoniam CK ſecat parallelas EF, GS in N & K, erit (a) GK ad KS, ut EN ad NF; ergo cum ſint æquales EN, NF, etiam æquabuntur GK, KS. Sed quia eſt OR parallela (b) verticali tangenti EF, ac proinde (c) ordinata axi QN, etiam ſunt æquales OK, KR; ergo æquabuntur & reliquæ GO, RS.

(a) per lem.pr.23.
(b) per hyp.
(c) per cor.1. pr.13.

Propositio XL.

Iiſdem poſitis quæ in præcedenti propoſitione, quadratum EN æquabitur rectangulo GOS.

DUcta OA parallela axi NQ, quæ (d) ordinata erit conjugato axi Bb, quadratum OA vel (e) KC erit ad ſummam quadratorum CB, CA, ut (f) quadratum NC ad quadratum CB, ſive (g) ut quadratum NC ad quadratum NE. Sed ob parallelas NE, KG, eſt (h) KC ad KG, ut NC ad NE, & (i) quadratum KC ad quadratum KG, ut quadratum NC ad quadratum NE; ergo etiam KC quadratum erit (k) ad ſummam quadratorum CB, CA, ut idem KC quadratum ad quadratum KG, unde ſumma quadratorum CB, CA æquabitur KG quadrato, & propte-

(d) per cor.4. pr.27.
(e) per pr.34.l.1.
(f) per pr.31.
(g) per def.14.
(h) per cor.1. pr.4. l.6.
(i) per pr.22.l.6.
(k) per pr.12.l.5.

rea

rea ſi utrinque auferantur quadrata æqualia CA, KO, reliquum quadratum CB vel EN (*a*) æquabitur reliquo rectangulo GOS.

(*a*) per pr. 5. l. 2.

CORKOLLARIUM I.

Hinc GO erit (*b*) ad EN, ut EN ad OS. Sunt vero (*c*) æquales EN, NF; ergo & GO erit ad EN, ut NF ad OS.

(*b*) per pr. 17. l. 6. (*c*) per def. 14.

COROLLARIUM II.

Etiam rectangulum GRS æquale erit quadrato NE. Quippe cum ſint æquales (*d*) GO, RS, addita utrinque OR, æquabuntur quoque GR, OS, atque rectangulum GOS æquabitur alteri GRS, ideoque hoc etiam æquabitur (*e*) quadrato NE.

(*d*) per pr. 39. (*e*) per hanc pr.

COROLLARIUM III.

Ducta qualibet alia MILV parallela ipſi EF vel Bb, rectangulum MIV æquabitur GOS, utrumque enim (*f*) æquatur quadrato NE.

(*f*) per eand.

COROLLARIUM IV.

Ergo MI erit (*g*) ad GO, ut OS ad IV. Sed quia eſt KS minor ZV, & OK minor IZ, etiam OS minor erit IV; igitur & MI minor erit GO, ideoque ſi hyperbola & aſymptoti producantur, ſemper accedent propius ad ſe ipſas.

(*g*) per pr. 16. l. 6.

PROPOSITIO XLI.

TAB. VIII. *Fig.* 3.

Aſymptoti & hyperbola productæ in infinitum, accedent propius ad ſe ipſas, quam pro intervallo quolibet dato P, quin tamen unquam conveniant inter ſe.

FIat ut data P ad NE, ita CN ad quartam proportionalem CZ, agaturque per Z recta MILV parallela ipſi EF, vel Bb. Quia eſt IV major ZV, erit IV ad NF in majori ratione quam ZV ad NF. Sed ob parallelas

NF,

NF, ZV, eſt (a) ZV ad NF, ut CZ ad CN, aut ut (b) NE ad P; ergo etiam IV erit ad NF in majori ratione quam NE ad P. Sed quia rectangulum MIV æquatur (c) quadrato NE aut rectangulo ENF, erit (d) IV ad NF, ut NE ad MI; ergo & NE erit ad MI in majori ratione quam eadem NE ad P, ac proinde MI minor (e) eſt ipſa P, unde aſymptotus CE accedet propius ad hyperbolam quam pro intervallo quolibet dato P. Non poteſt tamen cum hyperbola convenire, quippe inter utramque eſt ſemper aliqua recta MI, quæ continet cum IV rectangulum MIV æquale (f) quadrato NE.

(a) per cor. 1. pr. 4. l. 6.
(b) per conſtr.
(c) per pr. 40.
(d) per pr. 16. l. 6.
(e) per pr. 10. l. 5.
(f) per pr. 40.

COROLLARIUM I.

Hinc nulla eſt recta linea ita parva, ut nequeat aſſignari altera minor ipſa, ideoque quælibet data recta dividi poteſt in infinitum.

COROLLARIUM II.

Si ex quolibet puncto D intra aſymptoticum angulum ECF agatur quælibet recta DA parallela aſymptoto uni CF, eadem verſus A producta, hyperbolæ occurret in aliquo puncto P. Nam intervallum parallelarum DA, CF remanet ſemper idem, dum e contrario intervallum hyperbolæ NRL ab aſymptoto CF minui (g) ſemper debet.

TAB. VIII. *Fig.* 4.

(g) per hanc pr.

PROPOSITIO XLII.

Si per aliquod punctum I hyperbolæ INL trajiciatur quælibet recta HT, aſymptotos ſecans in H & T; rectangulum HRT æquabitur alteri HIT.

TAB. VIII. *Fig.* 4.

AGantur per I & R rectæ MV, GS parallelæ tangenti EF aut conjugato axi Bb. Quia rectangulum MIV æquatur (h) alteri

(h) per cor. 3. pr. 40.

GOS vel etiam alteri (*a*) GRS, erit GR (*b*) ad MI, ut IV ad RS. Sed ob parallelas MI, GR, eſt (*c*) GR ad MI, ut HR ad HI, & ob parallelas RS, IV, eſt (*d*) IV ad RS, ut IT ad RT; ergo etiam HR erit ad HI, ut IT ad RT, unde rectangulum HRT (*e*) æquabitur HIT.

(*a*) per cor. 2. pr. 40.
(*b*) per pr. 16. l. 6.
(*c*) per cor. 1. pr. 4. l. 6.
(*d*) per idem.
(*e*) per pr. 16. l. 6.

Corollarium.

Hinc curva & aſymptoto interceptæ HI, RT, ſemper mutuo ſunt æquales. Nam cum HR ſit (*f*) ad HI, ut IT ad RT, etiam (*g*) dividendo, erit IR ad HI, ut eadem IR ad RT, ideoque (*h*) æquabuntur HI, RT.

(*f*) per hanc pr.
(*g*) per pr. 17. l. 5.
(*h*) per pr. 9. l. 5.

Propositio XLIII.

Tab. VIII. Fig. 5.

Si rectæ HP aſymptotis interceptæ, & tangenti curvam in puncto O, agatur parallela FIDT; erit HO major FI.

Agantur per I & O rectæ MV, GS parallelæ conjugato axi Bb, quæ erunt (*i*) mutuo parallelæ, unde angulus HGO (*k*) æquabitur FMI. Verum ob parallelas (*l*) HO, FI, etiam angulus GHO æqualis (*m*) eſt alteri MFI; ergo triangulum HGO erit (*n*) ſimile FMI, & HO erit ad FI, ut GO ad MI. Eſt autem GO (*o*) major MI; ergo & HO major erit FI.

(*i*) per pr. 30. l. 1.
(*k*) per pr. 27. l. 1.
(*l*) per hyp.
(*m*) per pr. 27. l. 1.
(*n*) per pr. 4. l. 5.
(*o*) per cor. 4. pr. 40.

Pro-

PROPOSITIO XLIV.

Recta HP aſymptotis intercepta, & hyperbolam tangens in puncto O, bifariam diviſa erit in eodem puncto contactus O.

Sint ſi fieri poteſt, inæquales OH, OP, atque ex majori OP auferatur portio AP æqualis ipſi OH. Ducta deinde ex A recta AD parallela aſymptoto CV, quæ curvæ (a) occurret in puncto D, agatur per D recta FIDT parallela tangenti HP. Quia ſunt parallelæ (b) tam rectæ AP, DT, quam rectæ AD, PT, parallelogrammum erit DAPT, & ideo æquabuntur (c) AP, DT. Sed eſt HO (d) ipſi AP æqualis, & FI (e) ipſi DT; ergo æquabuntur quoque HO, FI, quod eſt (f) abſurdum. Itaque ipſa HP bifariam ſecta erit in puncto O.

(a) per cor. 2. pr. 41.
(b) per conſtr.
(c) per pr. 34. l. 1.
(d) per hyp.
(e) per cor. pr. 42.
(f) per pr. 43.

PROPOSITIO XLV.

Si per quodlibet punctum R hyperbolæ FOL agatur AFRT parallela tangenti HP; rectangulum AFT æquabitur quadrato HO.

TAB. VIII. Fig. 6.

Juncta OR quæ aſymptotos ſecet in G & S, erunt (g) æquales GO, RS; atque adeo etiam GR, OS, unde GR erit ad GO, ut OS ad RS. Sed ob parallelas HO, AR, eſt (h) AR ad HO, ut GR ad GO, & ob parallelas RT, OP, eſt (i) OP ad RT, ut OS ad RS; ergo etiam AR erit ad HO, ut OP ad RT, & (k) rectangulum ART æquabitur alteri HOP, ſive (l) quadrato HO.

(g) per cor. pr. 42.
(h) per cor. 1. pr. 4. l. 6.
(i) per idem.
(k) per pr. 16. l. 6.
(l) per pr. 44.

(a) per pr. 42. Atqui rectangulum A R T æquatur (*a*) alteri A F T; ergo etiam rectangulum A F T æquabitur quadrato H O.

C A P U T IX.

De hyperbolæ diametris ſecundariis.

Propositio XLVI.

Tab. IX. Fig. 1. Omnis recta, ut F R, parallela tangenti H P, & utrinque hyperbola terminata, biſariam in E ſecatur ab alia recta C E, ducta per centrum C & contactum O.

Recta F R producta aſymptotos ſecet in A & T. Cum parallelæ A T, H P ſint ſectæ a recta C E in E & O, erit (*b*) A E ad (b) per lem. pr. 4. E T, ut H O ad O P. Sunt vero (*c*) æquales (c) per pr. 44. H O, O P; ergo & æquabuntur A E, E T. Porro ſunt (*d*) quoque æquales A F, R T; er- (d) per cor. pr. 42. go & æquabuntur F E, E R, ideoque F R biſariam erit ſecta in puncto E.

Corollarium.

Producta ergo C E in D, erit (*e*) D O dia- (e) per cor. def. 6. meter *Secundaria*, cui ordinabuntur lineæ rectæ omnes, parallelæ tangenti H P, & utrinque hyperbola terminatæ.

PROPOSITIO XLVII.

Si recta NL utrinque hyperbola terminata, biſecetur in puncto E, & ducta ex E per centrum C recta ED, utrique hyperbolæ occurrente in O & D, agatur HP quæ curvam tangat in puncto O; erit NL parallela ipſi HP.

TAB. IX. Fig. 3.

SI recta NL non eſt parallela tangenti HP, agatur per E huic parallela FR, aſymptotos ſecans in A & T, quæ erit biſariam ſecta (*a*) ab ipſa CE in E, unde cum ſint (*b*) æquales AF, RT, etiam æquabuntur AE, ET. Pariter quia IN æqualis (*c*) eſt ipſi LM, & NE (*d*) ipſi EL, etiam æquabuntur IE, EM. Sed etiam angulus IEA æquatur (*e*) alteri TEM; ergo triangulum AIE æquabitur (*f*) ETM, & angulus IAE vel CAE aut CAT æqualis erit alteri ETM vel ATM, unde in triangulo ACT angulus internus erit externo æqualis, quod eſt abſurdum. Itaque non FR, ſed NL eſt parallela tangenti HP.

(*a*) per pr. 46. (*b*) per cor. pr. 42. (*c*) per idem cor. (*d*) per hyp. (*e*) per pr. 15. l. 6. (*f*) per pr. 4. l. 1.

COROLLARIUM I.

Quia eſt NL parallela tangenti HP, etiam aliæ rectæ omnes hyperbola pariter terminatæ, & parallelæ ipſi NL, erunt ſimiliter (*g*) parallelæ eidem tangenti HP, ideoque biſariam (*h*) ſecabuntur a recta CE vel DO, quæ proinde erit diameter earundem.

(*g*) per pr. 30. l. 1. (*h*) per pr. 46.

COROLLARIUM II.

Quoniam dum æquantur EN, EL, neceſſario ſunt (*i*) inæquales EA, ET, ſive EF, ER; patet, duas rectas NL, FR, utrinque hyperbola terminatas, & per ejuſdem centrum non tranſeuntes, ſe ſe biſariam non ſecare.

(*i*) per hanc pr.

Propositio XLVIII.

Tab. IX. Fig. 1.

In quavis hyperbola FOM rectangulum DEO eſt ad quadratum ordinatæ FE, ut quadratum CO ad quadratum HO.

QUoniam DO biſariam (a) ſecta eſt in C, eique addita eſt OE, erit (b) CE quadratum æquale quadrato CO una cum rectangulo DEO. Pariter cum AT ſecta biſariam ſit (c) in E, & non biſariam in F, erit AE quadratum æquale (d) quadrato FE una cum rectangulo AFT. Hoc autem poſito, ſic oſtenditur propoſitio. Quia eſt HO parallela lateri AE trianguli ACE, erit (e) CE ad CO, ut AE ad HO, & quadratum CE ad quadratum CO, ut (f) quadratum AE ad quadratum HO, ſive ut quadratum AE ad (g) rectangulum AFT; igitur convertendo (h) quadratum CE erit ad reliquum rectangulum DEO, ut quadratum AE ad reliquum quadratum FE, & (i) invertendo, rectangulum DEO erit ad CE quadratum, ut quadratum FE ad AE quadratum, & denique (k) permutando, rectangulum DEO erit ad FE quadratum, ut quadratum CE ad AE quadratum, aut ut quadratum CO ad HO quadratum.

(a) per pr. 27.
(b) per pr. 6. l. 2.
(c) per pr. 46.
(d) per pr. 5. l. 2.
(e) per cor. 1. pr. 4. l. 6.
(f) per pr. 22. l. 6.
(g) per pr. 45.
(h) per cor. 1. pr. 18. l. 5.
(i) per ſchol. pr. 16. l. 5.
(k) per pr. 16. l. 5.

Pro-

PROPOSITIO XLIX.

In quavis hyperbola FOM quadrata rectarum FE, KS, quæ ordinantur diametro ſecundariæ DO, ſunt ut rectangulum DEO ad aliud DSO. TAB. IX. Fig. 2.

Rectangulum DEO eſt (a) ad ordinatæ FE quadratum, ut quadratum CO ad quadratum HO. Sed in eadem quoque ratione eſt rectangulum DSO ad (b) quadratum KS; ergo rectangulum DEO erit ad quadratum FE (c), ut rectangulum DSO ad quadratum KS, & (d) invertendo, quadratum FE ad rectangulum DEO, ut quadratum KS ad rectangulum DSO, & permutando (e) quadratum FE ad quadratum KS, ut rectangulum DEO ad rectangulum DSO.

(a) per pr. 48.
(b) per eand.
(c) per pr. 11. l. 5.
(d) per ſchol. pr. 16. l. 5.
(e) per pr. 16. l. 5.

SCHOLION.

Quia ut in diametro primigenia, ita & in qualibet ſecundaria quadrata ordinatarum ſunt, ut rectangula abſciſſarum; patet, ea omnia quæ circa parametrum & tangentem oſtenſa ſunt relate ad diametrum primigeniam, etiam habere locum in qualibet ſecundaria. Si ergo fiat, ut rectangulum DEO ad quadratum ordinatæ FE, ita DO ad quartam proportionalem OL; hæc erit (f) parameter diametri ſecundariæ DO. Rurſus ſi ex termino K cujuſvis ordinatæ KS ducatur tangens KT, conveniens cum diametro DO in T; rectæ CS, CO, CT erunt (g) continue proportionales.

(f) per cor. 1. pr. 10.
(g) per cor. 4. pr. 14.

Propositio XLVIII.

Tab. IX. Fig. 1.

In quavis hyperbola FOM rectangulum DEO eſt ad quadratum ordinatæ FE, ut quadratum CO ad quadratum HO.

Quoniam DO bifariam (*a*) ſecta eſt in C, eique addita eſt OE, erit (*b*) CE quadratum æquale quadrato CO una cum rectangulo DEO. Pariter cum AT ſecta bifariam ſit (*c*) in E, & non bifariam in F, erit AE quadratum æquale (*d*) quadrato FE una cum rectangulo AFT. Hoc autem poſito, ſic oſtenditur propoſitio. Quia eſt HO parallela lateri AE trianguli ACE, erit (*e*) CE ad CO, ut AE ad HO, & quadratum CE ad quadratum CO, ut (*f*) quadratum AE ad quadratum HO, ſive ut quadratum AE ad (*g*) rectangulum AFT; igitur convertendo (*h*) quadratum CE erit ad reliquum rectangulum DEO, ut quadratum AE ad reliquum quadratum FE, & (*i*) invertendo, rectangulum DEO erit ad CE quadratum, ut quadratum FE ad AE quadratum, & denique (*k*) permutando, rectangulum DEO erit ad FE quadratum, ut quadratum CE ad AE quadratum, aut ut quadratum CO ad HO quadratum.

(*a*) per pr. 27.
(*b*) per pr. 6. l. 2.
(*c*) per pr. 46.
(*d*) per pr. 5. l. 2.
(*e*) per cor. 1. pr. 4. l. 6.
(*f*) per pr. 22. l. 6.
(*g*) per pr. 45.
(*h*) per cor. 1. pr. 18. l. 5.
(*i*) per ſchol. pr. 16. l. 5.
(*k*) per pr. 16. l. 5.

PROPOSITIO XLIX.

In quavis hyperbola FOM quadrata rectarum FE, KS, quæ ordinantur diametro ſecundariæ DO, ſunt ut rectangulum DEO ad aliud DSO. TAB. IX. *Fig.* 2.

REctangulum DEO eſt (*a*) ad ordinatæ FE quadratum, ut quadratum CO ad quadratum HO. Sed in eadem quoque ratione eſt rectangulum DSO ad (*b*) quadratum KS; ergo rectangulum DEO erit ad quadratum FE (*c*), ut rectangulum DSO ad quadratum KS, & (*d*) invertendo, quadratum FE ad rectangulum DEO, ut quadratum KS ad rectangulum DSO, & permutando (*e*) quadratum FE ad quadratum KS, ut rectangulum DEO ad rectangulum DSO.

(*a*) per pr. 48.
(*b*) per eand.
(*c*) per pr. 11. l. 5.
(*d*) per ſchol. pr. 16. l. 5.
(*e*) per pr. 16. l. 5.

SCHOLION.

Quia ut in diametro primigenia, ita & in qualibet ſecundaria quadrata ordinatarum ſunt, ut rectangula abſciſſarum; patet, ea omnia quæ circa parametrum & tangentem oſtenſa ſunt relate ad diametrum primigeniam, etiam habere locum in qualibet ſecundaria. Si ergo fiat, ut rectangulum DEO ad quadratum ordinatæ FE, ita DO ad quartam proportionalem OL; hæc erit (*f*) parameter diametri ſecundariæ DO. Rurſus ſi ex termino K cujuſvis ordinatæ KS ducatur tangens KT, conveniens cum diametro DO in T; rectæ CS, CO, CT erunt (*g*) continue proportionales.

(*f*) per cor. 1. pr. 10.
(*g*) per cor. 4. pr. 14.

Propositio L.

Tab. IX. Fig. 2. Si diametro ſecundariæ DO ordinetur quælibet recta FE, ipſique per centrum C agatur parallela Bb, quæ ſit æqualis tangenti HP, & bifariam ſecta eodem in centro C; erit Bb diameter conjugata alterius DO.

(a) per pr. 48. (b) per ſchol. pr. 49. (c) per pr. 11. l. 5. (d) per pr. 27. & 44. (e) per lem. pr. 14. (f) per hyp. (g) per pr. 29.

Quadratum CO eſt (*a*) ad quadratum OH, ut rectangulum DEO ad quadratum FE. Sed etiam DO eſt (*b*) ad OL, ut rectangulum DEO ad quadratum FE; ergo quadratum CO erit (*c*) ad quadratum OH, ut DO ad OL. Sed quia DO, HP bifariam ſunt (*d*) ſectæ in C & O, quadratum DO eſt ad quadratum HP, ut quadratum CO ad quadratum OH; ergo quadratum DO erit ad quadratum HP, ut DO ad OL, ideoque DO, HP, OL erunt (*e*) continue proportionales, & HP ſeu (*f*) Bb media inter DO, & OL, erit diameter (*g*) conjugata alterius DO.

Corollarium.

(h) per pr. 48. (i) per hanc pr.

Quia quadratum CO eſt (*h*) ad quadratum OH, ut rectangulum DEO ad ordinatæ FE quadratum, eſtque OH ipſi CB (*i*) æqualis, etiam quadratum ſemidiametri tranſverſæ CO erit ad quadratum ſemidiametri conjugatæ CB, ut rectangulum DEO ad ordinatæ FE quadratum.

CA-

CAPUT X.

De ſymptomatis principalibus ellipſeos & hyperbolæ relate ad varias diametros conjugatas.

PROPOSITIO LI.

Si recta AT, quæ ellipſim aut hyperbolam tangit in puncto A, occurrat diametro conjugatæ ED in H; ducta AF huic diametro ordinata, erit CD quadratum æquale rectangulo HCF. TAB. IX. *Fig.* 4. 5.

DUcta ordinata AM diametro tranſverſæ LS, quadratum CL erit (*a*) ad quadratum CD, ut rectangulum LMS ad ordinatæ MA quadratum. Atqui rectangulum LMS æquatur (*b*) alteri TMC; ergo & quadratum CL erit ad quadratum CD, ut rectangulum TMC ad quadratum MA, ſive in ratione (*c*) compoſita ex ratione TM ad MA ſeu TC ad (*d*) CH, & ex ratione MC ad MA ſeu (*e*) MC ad CF. Sed etiam rectangulum TCM eſt (*f*) ad rectangulum HCF in eadem compoſita ratione; ergo quadratum CL erit ad quadratum CD, ut rectangulum TCM ad aliud HCF. Sed quadratum CL æquatur rectangulo TCM; ergo & CD quadratum (*g*) æquale erit rectangulo HCF.

(*a*) per pr. 36. & cor. pr. 50.
(*b*) per cor. 6. pr. 14.
(*c*) per cor. 2. pr. 23. l. 6.
(*d*) per pr. 4. l. 6.
(*e*) per pr. 34. l. 1.
(*f*) per cor. 2. pr. 23. l. 6.
(*g*) per cor. 5. pr. 14.

COROLLARIUM I.

Hinc CH erit (*h*) ad CD, ut eadem CD ad CF, hoc eſt tres rectæ CH, CD, CF erunt continue proportionales.

(*h*) per pr. 17. l. 6.

COROLLARIUM II.

Quia CD quadratum æquatur (*i*) rectangulo HCF, utique dempto in ellipſi, & addito

(*i*) per hanc pr.

in

in hyperbola CF quadrato, ibi differentia, hic ſumma quadratorum CD, CF æquabitur (*a*) rectangulo HFC.

(*a*) per pr. 3. l. 2.

Corollarium III.

Si quoque ex B ducta BK tangente, ordinetur BG diametro ED, etiam CD quadratum æquale erit (*b*) rectangulo KCG; ergo rectangulum HCF æquabitur KCG, & CG erit (*c*) ad CF, ut CH ad CK.

(*b*) per hanc pr. & per cor. 5. pr. 14.
(*c*) per pr. 16. l. 6.

Propositio LII.

Tab. IX. Fig. 4. 5.

Si ex verticibus A & B diametrorum conjugatarum AI, BR agantur diametro tertiæ ED ordinatæ AF, BG; quadratum CG æquale erit rectangulo HFC.

Agantur AH, BK tangentes curvam in A & B, quæ in punctis H, K conveniant cum ED. Quia ſunt parallelæ (*d*) AH, CB, angulus AHF (*e*) æquabitur BCG. Verum ob parallelas AF, BG, etiam angulus AFH æquatur (*f*) alteri BGC; ergo triangulum HAF erit (*g*) ſimile CBG, & HF erit ad CG, ut HA ad CB. Sed quia CA parallela eſt ipſi (*h*) BK, & AH ipſi CB, etiam triangulum CAH eſt (*i*) ſimile CBK, & HC eſt ad CK, ut HA ad CB; ergo HF quoque erit (*k*) ad CG, ut HC ad CK. Sed etiam CG eſt ad CF (*l*), ut HC ad CK; ergo etiam HF erit (*m*) ad CG, ut eadem CG ad CF; atque CG quadratum æquabitur (*n*) rectangulo HFC.

(*d*) per cor. 1. pr. 13.
(*e*) per pr. 17. l. 1.
(*f*) per eand.
(*g*) per pr. 4. l. 6.
(*h*) per cor. 1. pr. 13.
(*i*) per pr. 4. l. 6.
(*k*) per pr. 11. l. 5.
(*l*) per cor. 3. pr. 51.
(*m*) per pr. 11. l. 5.
(*n*) per pr. 17. l. 6.

Corollarium I.

Hinc quadratum CG in ellipſi æquabitur (*o*) differentiæ, & in hyperbola ſummæ quadratorum CD, CF.

(*o*) per cor. 2. pr. 51.

Co-

COROLLARIUM II.

Quia CG quadratum æquale eſt (*a*) in ellipſi differentiæ quadratorum CD, CF, ſive (*b*) rectangulo EFD, ſi utrumque auferatur ab eodem CD quadrato, reliquum rectangulum (*c*) EGD æquale erit reliquo quadrato CF.

(*a*) per cor. 1.
(*b*) per pr. 5. l. 2.
(*c*) per eand.

COROLLARIUM III.

Quia in hyperbola eſt CG quadratum æquale (*d*) ſummæ quadratorum CD, CF, ablato utrinque CD quadrato, reliquum (*e*) rectangulum EGD æquabitur reliquo quadrato CF.

(*d*) per cor. 1.
(*e*) per pr. 6. l. 2.

COROLLARIUM IV.

Hinc in utraque curva erit CF ad BG, ut CD ad CL. Quippe rectangulum EGD eſt (*f*) ad quadratum BG, ut quadratum CD ad quadratum CL. Sed CF quadratum æquale (*g*) eſt rectangulo EGD; ergo CF quadratum erit quoque ad BG quadratum, ut quadratum CD ad quadratum CL, & CF erit (*h*) ad BG, ut CD ad CL.

(*f*) per cor. pr. 38. & cor. pr. 40.
(*g*) per cor. 3.
(*h*) per pr. 22. l. 6.

COROLLARIUM V.

Denique in ellipſi ſumma quadratorum CF, CG æquabitur quadrato CD. Nam, quia CG quadratum æquale eſt (*i*) rectangulo EFD, addito utrinque quadrato CF, ſumma quadratorum CF, CG æquabitur ſummæ quadrati CF & rectanguli EFD, ſive (*k*) CD quadrato.

(*i*) per cor. 2.
(*k*) per pr. 5. l. 2.

Digitized by Google

Propositio LIII.

Tab. IX. Fig. 4. 5. Si ab iiſdem verticibus A & B diametrorum conjugatarum AI, BR ordinentur quoque AM, BN diametro tertiæ LS; ſumma in ellipſi, & differentia in hyperbola quadratorum CM, CN æquabitur quadrato CL.

Ducta in ellipſi ordinata RV quæ erit parallela ipſi BN, erit CV ad CN, ut (*a*) per pr. 4. l. 6. (*a*) RC ad CB; ergo cum ſint æquales RC, CB, etiam æquabuntur CV, CN. Sed ſumma quadratorum CM, CV æquatur (*b*) per cor. 5. pr. 52. (*b*) quadrato CL; ergo & ſumma quadratorum CM, CN æqualis erit quadrato CL. In hyperbola vero cum ſit SL diameter conjugata hyperbolæ (*c*) per cor. 1. pr. 52. DB, erit (*c*) CM quadratum æquale ſummæ quadratorum CL, CN, unde utrinque ablato quadrato CN, differentia quadratorum CM, CN æqualis erit quadrato CL.

Propositio LIV.

Tab. IX. Fig. 4. 5. Si recta AT ellipſin aut hyperbolam tangens in puncto A, occurrat diametris conjugatis in T & H; rectangulum HAT æquale erit quadrato ſemidiametri CB, quæ conjugata eſt alterius AC, ductæ ex contactu ad centrum C.

Rectangulum HFC eſt ad rectangulum (*d*) per cor. 2. pr. 23. l. 6. HAT in ratione (*d*) compoſita ex ratione HF ad HA, & ex ratione FC ad AT. Verum ob parallelas AF, TC, ratio HF ad (*e*) per pr. 2. l. 6. & 16. l. 5. HA eſt (*e*) æqualis rationi FC ad AT; ergo rectangulum HFC erit ad rectangulum HAT in ratione duplicata HF ad HA, ſive ut quadra-

dratum HF ad (*a*) quadratum HA. Sed ob triangulum CBG ſimile (*b*) AHF, eſt CG ad CB, ut HF ad HA, & quadratum CG (*c*) ad quadratum CB, ut quadratum HF ad quadratum HA; ergo & rectangulum HFC erit ad (*d*) rectangulum HAT, ut quadratum CG ad quadratum CB. Atqui rectangulum HFC æquatur (*e*) CG quadrato; ergo & rectangulum HAT æquale erit CB quadrato.

(*a*) per ſchol. pr. 20. l. 6. (*b*) per pr. 52. (*c*) per pr. 22. l. 6. (*d*) per pr. 11. l. 5. (*e*) per pr. 52.

Propositio LV.

Si diametri ED, LS fuerint axes conjugati; ſumma in ellipſi, & differentia in hyperbola quadratorum ex ſemidiametris conjugatis CA, CB æquatur ubique ſummæ aut differentiæ quadratorum ex ſemiaxibus conjugatis, CL, CD.

Tab. IX. Fig. 6. & Tab. X. Fig. 1.

Ex punctis A & B agantur AM, BN, atque AF, BG, quarum primæ ſint perpendiculares ſive ordinatæ axi tranſverſo LS, reliquæ vero conjugato axi ED. Quia in ellipſi quadratum CL æquale eſt (*f*) quadratis CM, CN, ſive etiam (*g*) quadratis AF, BG, & CD quadratum æquatur (*h*) quadratis CF, CG, utique duo quadrata CL, CD æquabuntur quatuor quadratis ſimul AF, CF, BG, CG. Sed quatuor hæc quadrata æquantur (*i*) duobus quadratis AC, CB; ergo duo quadrata CL, CD æqualia erunt duobus AC, CB.

In hyperbola vero cum ſit quadratum AC (*k*) æquale quadratis ſimul CM, MA, & quadratum CB quadratis ſimul (*l*) CG, GB, etiam exceſſus quadratorum CA, CB æqualis erit exceſſui, quo ſumma quadratorum CM, MA differt a ſumma quadratorum CG, GB. Verum CM quadratum æquatur (*m*) quadratis

(*f*) per pr. 53. (*g*) per pr. 34. l. 1. (*h*) per cor. 5. pr. 52. (*i*) per pr. 47. l. 1. (*k*) per eand. (*l*) per eand. (*m*) per pr. 53.

tis

(a) per cor. 1. pr. 52. tis CN, CL, & CG quadratum (a) quadratis CF, CD; ergo exceſſus quadratorum CA, CB eſt æqualis exceſſui, quo tria quadrata ſimul CN, CL, MA diſferunt a tribus quadratis ſimul CF, CD, GB. Sunt vero (b) æqualia tum quadrata CN, GB, tum etiam (c) MA, CF; ergo demptis hiſce æqualibus, exceſſus, quo tria quadrata differunt a tribus quadratis, æqualis erit exceſſui quo quadratum CL differt a quadrato CD, ideoque huic exceſſui æqualis quoque erit exceſſus quadratorum CA, CB.

(b) per pr. 34. l. 1.

(c) per eand.

Propositio LVI.

Tab. IX. Fig. 6. Tab. X. Fig. 1.

Si per vertices duarum diametrorum conjugatarum AI, BR agantur quatuor contingentes; parallelogrammum illis contentum æquale erit rectangulo, quod conficiunt aliæ quatuor contingentes, ductæ per vertices axium LS, ED.

Rectæ AH, BK, quæ curvam tangunt in A & B, conveniant mutuo ad punctum O, reliquæ vero tangentes LP, DP occurrant ſibi ad punctum P, & juncta BH, compleatur rectangulum CNQH. Itaque cum AH curvam tangat in puncto A, ſitque AF ordinata axi ED, erit (d) CH ad CD, ut eadem CD ad CF. Sed CD eſt (e) ad CL, ut CF ad BG; ergo (f) ex æquo, erit CH ad CL, ut CD ad BG, vel (g) ut CD ad CN; & rectangulum ex CL in CD ſive CLPD æquale erit (h) rectangulo ex CH in CN ſive CNQH. Hoc autem rectangulum CNQH eſt (i) duplum trianguli CBH, cum ambo habeant communem baſim CH, ſintque inter parallelas NQ, CH, & parallelogrammum

(d) per cor. 1. pr. 51.
(e) per cor. 4. pr. 52.
(f) per pr. 22. l. 5.
(g) per pr. 34. l. 1.
(h) per pr. 16. l. 6.
(i) per pr. 37. l. 1.

mum CAOB duplum eſt (4) ejuſdem trianguli CBH, cum habeant ambo communem baſim CB, ſintque inter parallelas AH, CB; ergo parallelogrammum CAOB æquale erit rectangulo CNQH, aut ſibi æquali alteri CLPD. Sed parallelogrammum CAOB eſt quarta pars ejus quod comprehendunt quatuor contingentes, ductæ per vertices diametrorum conjugatarum AI, BR, & rectangulum CLPD eſt quarta pars ejus quod continetur quatuor contingentibus, ductis per vertices axium LS, ED; ergo & parallelogrammum contentum primis quatuor contingentibus, æquale erit rectangulo, quod efficiunt reliquæ quatuor contingentes.

(4) per cand.

CAPUT XI.

De focis aut umbilicis ellipſeos & hyperbolæ.

DEFINITIO XV.

SI in axe tranſverſo BM ellipſeos aut hyperbolæ ita accepta fuerint duo puncta F & V, ut ſingula rectangula BFM, BVM æqualia ſint quadrato ſemiaxis conjugatæ CG; puncta F & V vocabuntur *Foci* aut *Umbilici* ellipſeos aut hyperbolæ.

TAB. X. Fig. 1. 3.

SCHOLION.

Doctrina focorum ellipſeos mirum in motum confert ad Solis ſyſtema percipiendum. Conſtat ſiquidem ex Nevvtono, circa Solem Planetas ſingulos ita ferri, ut orbitæ eorum totidem ſint ellipſes, fixo manente Sole in uno, communique illarum foco. Idem de Cometis reſpectu Solis, deque ſecundariis

Pla-

Planetis relate ad ſuos primarios eſt dicendum.

Propositio LVII.

Tab. X. Fig. 2. 3. Si ſuper axe tranſverſo BM ellipſeos aut hyperbolæ fiat ſemicirculus BLM, qui a tangente AE ſecetur in S & L, tum vero ex hiſce punctis agantur SF, LV perpendiculares ipſi AE, & occurrentes axi in F & V; hæc puncta erunt foci aut umbilici.

Ductis verticalibus tangentibus BH, MR, quæ erunt (a) axi BM normales, jungantur FH, FS, FR, aganturque chordæ SB, SM. Quia recti ſunt anguli (b) HBF, HSF, utique circulus diametro HF deſcriptus, tranſibit (c) per B & S, unde angulus BSF æquabitur (d) BHF. Pariter cum ſint recti (e) anguli FMR, FSR, circulus diametro FR deſcriptus, tranſibit (f) per M & S, ideoque angulus MSR æquabitur (g) MFR. Sed propter rectum (h) angulum BSM æqualem recto alteri FSR, angulus BSF æquabitur MSR; ergo & angulus BHF æquabitur MFR. Sed etiam rectus angulus HBF æquatur recto alteri FMR; ergo triangulum BHF erit (i) ſimile FRM, & BH erit ad BF, ut FM ad MR, atque rectangulum ex BH in MR æquabitur (k) alteri BFM. Atqui rectangulum ex BH in MR æquale eſt (l) quartæ parti rectanguli ex tranſverſo BM in ejus parametrum, ſive quadrato (m) ſemiaxis conjugati CG; ergo etiam rectangulum BFM eidem quadrato æquale erit, atque adeo focus erit (n) in F. Pari modo conſtabit, alterum focum eſſe in V; igitur foci erunt in F & V.

(a) per cor. 4. pr. 13.
(b) per conſtr.
(c) per pr. 31. l. 3.
(d) per pr. 21. l. 3.
(e) per conſtr.
(f) per pr. 31. l. 3.
(g) per pr. 21. l. 3.
(h) per eand.
(i) per pr. 4. l. 6.
(k) per pr. 16. l. 6.
(l) per pr. 15.
(m) per cor. 1. pr. 29.
(n) per def. 15.

Co-

COROLLARIUM.

Hinc foci F & V æquidiſtabunt a centro C. Demiſſa enim ad AE perpendiculari CO, quæ biſecabit (a) chordam SL in O, utique rectæ FS, CO, VL perpendiculares erunt (b) tangenti AE, atque ita mutuo (c) parallelæ, unde FC erit (d) ad CV, ut SO ad OL. Sunt vero æquales (e) SO, OL; ergo & æquabuntur FC, CV.

(a) per pr. 3. l. 3. (b) per conſtr. (c) per pr. 29. l. 1. (d) per lem. pr. 23. (e) ex demonſt.

LEMMA I.

Tab. X. Fig. 4.

Si ex aliquo puncto A extra circulum MFD ductis tangente AF, & per ejus centrum ſecante AD, in hanc demittatur perpendicularis FB; erit AD harmonice ſecta in B & M, ſive DA erit ad AM, ut DB ad BM.

Ex D & M agantur tangentes DG, ME, quæ erunt (f) reſpective æquales ipſis GF, FE, & parallelæ (g) ipſi FB, atque adeo (h) etiam inter ſe. Ob parallelas ergo DG, ME, erit (i) DA ad AM, ut DG ad ME, aut ut GF ad FE. Sed DB eſt (k) ad BM, ut GF ad FE; ergo & DA erit (l) ad AM, ut DB ad BM.

(f) per cor. 2. pr. 36. l. 3. (g) per pr. 29. l. 1. (h) per pr. 30. l. 1. (i) per cor. 1. pr. 4. l. 6. (k) per lem. pr. 23. (l) per pr. 11. l. 5.

LEMMA II.

Tab. X. Fig. 5.

Si ex aliquo puncto A extra circulum MFD ductis tangente AF, atque per ejus centrum ſecante AD, cui perpendicularis ſit recta FB, agatur quælibet recta AR, occurrens ipſi FB in I, & circulo in H & R; erit AR harmonice ſecta in H & I, ſive RA erit ad AH, ut RI ad IH.

Producta FB in L, ſuper HR diametro fiat ſemicirculus HOR, & erecta IO perpendiculari ad HR, jungatur AO. Quia OI quadratum æquatur (m) rectangulo HIR ſive (n) etiam alteri FIL, duo quadrata ſimul OI, IB æqualia erunt rectangulo FIL una cum quadrato IB. Sed quia FL bifariam ſecta (o) eſt

(m) per cor. 1. pr. 17. l. 6. (n) per pr. 35. l. 3. (o) per pr. 3. l. 3.

eſt in B, & non bifariam in I, rectangulum FIL una cum quadrato IB æquatur (*a*) quadrato FB; ergo duo quadrata ſimul OI, IB æquantur quoque quadrato FB, & addito hinc inde quadrato AB, tria quadrata ſimul OI, IB, AB, ſive (*b*) duo ſimul OI, IA æqualia erunt duobus FB, BA. Jam vero duo quadrata OI, IA æquantur (*c*) quadrato AO, & duo quadrata FB, BA quadrato AF; ergo æqualia erunt quadrata AO, AF. Porro AF quadratum æquatur (*d*) rectangulo RAH; ergo & AO quadratum eidem rectangulo æquale erit, atque adeo AO (*e*) tanget in O ſemicirculum HOR, quem ſecat AR ducta per ejus centrum. Eſt autem OI perpendicularis (*f*) ipſi AR; ergo RA erit (*g*) ad AH, ut RI ad IH.

(*a*) per pr. 5. l. 2.
(*b*) per pr. 47. l. 1.
(*c*) per eand.
(*d*) per pr. 36. l. 3.
(*e*) per pr. 37. l. 3.
(*f*) per conſt.
(*g*) per lem. 1.

Lemma III.

Tab. X. Fig. 6.

Si ex quolibet puncto A extra circulum VKF ductis tangente AF, atque per ejus centrum ſecante AK, cui perpendicularis ſit recta FB, agatur AE parallela ipſi FB, & jungatur EB, circulo occurrens in O & R; erit ER harmonice ſecta in O & B, ſeu RE erit ad EO, ut RB ad BO.

Ductis RG, RA, quarum altera parallela ſit ad FB, altera eam ſecet in puncto I, circulum vero in H, jungatur HO, quæ parallela erit ipſi FB. Nam ſi non ita, ſit eidem FB parallela alia HV, quæ ſecta erit (*h*) normaliter, & (*i*) bifariam a diametro LK in P. Cum ergo RG, HS parallelæ ſint ipſi FB, erunt etiam (*k*) parallelæ inter ſe, unde ob triangulum GAR (*l*) ſimile PAH, erit GR ad PH, ut RA ad AH, & ob triangulum GBR ſimile (*m*) SBP, erit GR ad SP, ut RB ad BS, aut (*n*) ut RI ad IH. Sed RA eſt ad AH, ut (*o*) RI ad IH; ergo &

GR

(*h*) per pr. 27. l. 1.
(*i*) per pr. 3. l. 3.
(*k*) per pr. 30. l. 1.
(*l*) per cor. 1. pr. 4. l. 6.
(*m*) per pr. 4. l. 6.
(*n*) per pr. 2. l. 6.
(*o*) per lem. 2.

GR erit ad PH, ut eadem GR ad SP, ideo-
que (*a*) æquabuntur PH, SP, ſive (*b*) PV, (*a*) per
SP, quod eſt abſurdum. Itaque non HV, pr. 9. l. 5.
ſed HO parallela eſt ipſi FB vel AE, unde (*b*) ex demonſt.
RE erit (*c*) ad EO, ut RA ad AH, & (*c*) per
RB ad BO, ut RI ad IH. Vidimus autem pr. 2. l. 6.
eſſe RA ad AH, ut RI ad IH; ergo & RE
erit ad EO, ut RB ad BO.

PROPOSITIO LVIII.

Si ex focis F & V ad quodlibet punctum E Tab. XII
ellipſeos aut hyperbolæ inclinentur FE, VE; Fig. 1. & 4
ducta AE tangente curvam in puncto E,
angulus VEL ſemper æqualis erit alteri
FEA.

SUper axe tranſverſo BM deſcripto circulo
BLM, qui occurrat tangenti in S & L,
jungantur FS, LV, quæ perpendiculares erunt
(*d*) tangenti AE, atque ita mutuo (*e*) paral- (*d*) per
lelæ. Deinde ex puncto E ordinetur axi EI, pr. 57. (*e*) per
qua producta in ellipſi donec circulo in O oc- pr. 29. l. 1.
currat, jungatur AO, quæ circulum (*f*) in O (*f*) per
tanget; at in hyperbola ducta AO parallela pr. 16.
ordinatæ EI, jungatur IO, quæ circulum tan-
get (*g*) in puncto O. Quia eſt AL harmoni- (*g*) per
ce ſecta (*h*) in E & S, erit LA ad AS, ut pr. 17.
LE ad ES. Verum ob parallelas SF, LV, (*h*) per lem. 2. &
eſt (*i*) LV ad SF, ut LA ad AS; ergo 3.
etiam LV erit ad SF, ut LE ad ES, & (*k*) (*i*) per cor. 1. pr.
permutando, LV ad LE, ut SF ad ES. Sunt 4. l. 6.
autem recti ſive æquales anguli L, S; ergo (*k*) per
triangulum ELV erit (*l*) ſimile ESF, ideo- pr. 16. l. 6.
que angulus VEL æquabitur alteri FES vel (*l*) per pr. 6. l. 6.
FEA.

Corollarium I.

Tab. XI. Fig. 3. Hinc ſi candelæ lumen collocetur in foco F ex quo incidant radii in ellipſis concavitatem, ipſi ita reflecti debent, ut colligantur omnes in altero foco V. Conſtat ſiquidem ex *Catoptrica* lucis radium ſic reflecti, ut angulus reflexionis ſit æqualis angulo incidentiæ; unde ſi radius incidens ſit FR, ipſe ita reflecti debet, ut cum tangente LRA faciat angulum reflexionis æqualem incidentiæ angulo FRA. Id vero non obtinetur, niſi reflexus radius (*a*) ſit RV; igitur tendet ipſe ad alterum focum V. Contra ſi in V collocetur candelæ fax, tunc reflexi radii ab ellipſi, pergent omnes ad alterum focum F, ibique ignem, ob eorum concurſum mutuum, excitabunt. En igitur rationem, cur puncta F & V vocentur foci ellipſeos MRB!

(*a*) per pr. 58.

Corollarium II.

Quod de lucis radiis hactenus demonſtravi, etiam in radiis phonicis habet locum. Nempe ſi os loquentis collocetur in foco F, tunc radii phonici, veluti FR, FK, in cavitatem ellipſcos incidentes, reflectentur ad alterum focum V, unde ibi intenſior fiet ſonus. Hinc ſi cubiculum conſtruatur, cujus horizontalis ſectio ſit ellipſis, tunc poſitus auris in uno focò, perinde audiet ſubmiſſas voces loquentis in altero, ac ſi proximus ipſi foret.

Corollarium III.

Si inclinatæ ex focis VR, FR producantur in G & S, angulus SRL æquabitur GRA. Nam angulus SRL æquatur (*b*) angulo FRA, & angulus GRA alteri VRL. Sed angulus FRA æqualis (*c*) eſt ipſi VRL; ergo & angulus SRL æquabitur GRA. Quare ſi radius SR ita in convexitatem ellipſi cadat, ut vergat, & dirigatur ad focum F, re-

(*b*) per pr. 15. l. 1.

(*c*) per pr. 58.

reflexus erit RG, qui verget, ac dirigetur ad alterum focum V.

COROLLARIUM IV.

Si vero hyperbolam tangat HL in R, & inclinatæ ex focis VR, FR producantur in G & S, angulus SRL æquabitur VRH, & GRL alteri FRH. Nam angulus SRL æquatur (*a*) angulo FRH. Sed etiam angulus VRH æqualis (*b*) eſt angulo FRH; ergo & angulus SRL æquabitur VRH. Pari modo conſtabit, angulum GRL æqualem eſſe alteri FRH. TAB. XI. *Fig.* 4. (*a*) per pr. 15. l. 1. (*b*) per pr. 58.

COROLLARIUM V.

Hinc ſi candelæ lumen collocetur in foco V, tunc omnis radius, ut VR, poſtquam inciderit in convexitatem hyperbolæ ARM, ita reflexus perget per RS, ac ſi veniret ex altero foco F. Et ſi candelæ fax ſit poſita in foco F, tunc omnis radius, ut FR, ita a cavitate hyperbolæ reflectetur, ut tendat poſtea per RG, quaſi veniret ex altero foco V. Quare poſita face in V, oculo autem in S, apparebit ejus imago in foco F, & poſita face in F, oculo vero in G, illa apparebit in altero foco V.

COROLLARIUM VI.

Pariter ſi omnes radii, ut SR, ita incidant in convexitatem hyperbolæ ARM, ut convergant ad focum F, ipſi poſt reflexionem unientur omnes ad focum V. Et ſi radii omnes, veluti eſt GR, in cavitatem hyperbolæ ita cadant, ut convergant ad focum V, ipſi poſt reflexionem, unientur omnes ad focum F, ibique ignem, ob eorum concurſum mutuum, excitabunt. En igitur rationem, cur puncta F, V vocentur foci hyperbolarum oppoſitarum!

Propositio LIX.

Tab. XI. Fig. 5.6. In ellipſi ſumma inclinatarum FE, VE ad curvæ quodlibet punctum E, & earum differentia in hyperbola æquatur axi tranſverſo BM.

Super BM diametrum deſcripto circulo BLM, qui tangenti EA occurrat in S & L, jungantur FS, VL, quæ erunt (*a*) ad rectos angulos ipſi EA. Denique juncta CL, producantur FE, VL donec conveniant ad punctum R. Quia angulus VEL æquatur (*b*) alteri FEA aut (*c*) LER, & rectus angulus ELV æqualis eſt recto alteri ELR, latus autem EL commune eſt triangulis EVL, ERL, utique æquabuntur tum rectæ (*d*) EV, ER, tum etiam VL, LR. Sunt (*e*) vero æquales etiam VC, CF; ergo VL erit ad LR, ut VC ad CF, ideoque ſunt (*f*) parallelæ CL, FR, & FR erit (*g*) ad CL, ut FV ad VC. Sed eſt (*h*) FV dupla VC; ergo & FR dupla erit CL, aut æqualis axi tranſverſo BM. Verum ob æquales EV, ER, recta FR eſt in ellipſi ſumma inclinatarum FE, EV, & earum differentia in hyperbola; ergo ſumma inclinatarum in ellipſi, & earum differentia in hyperbola æquabitur axi tranſverſo BM.

(*a*) per pr. 57.
(*b*) per pr. 58.
(*c*) per pr. 15. l. 1.
(*d*) per pr. 26. l. 1.
(*e*) per cor. pr. 57.
(*f*) per pr. 2. l. 6.
(*g*) per cor. 1. pr. 4. l. 6.
(*h*) per cor. 1. pr. 57.

Corollarium I.

Quia vidimus parallelas eſſe (*i*) CL, FR, aut FE; patet, quod ſi ex centro C ellipſeos aut hyperbolæ agatur CL parallela inclinatæ ad focum FE, ipſa ita occurret tangenti EA in L, ut ſit CL ſemiaxi CB æqualis.

(*i*) In hac pr.

Co-

COROLLARIUM II.

Pariter cum CL occurrat tangenti EA in vertice recti anguli ALV; patet, quod ſi ex centro C ellipſeos aut hyperbolæ agatur quælibet recta CL inclinatæ FE parallela, quæ conveniat cum rangente EA in L, inde vero ex L agatur ad proximum focum V recta LV; prodibit rectus angulus ALV.

COROLLARIUM III.

Hinc ducta ad tangentem normali ET conveniente cum axe in T, erit VA harmonice ſecta in F & T. Nam cum æquentur (*a*) VL, LR, erit (*b*) VL ad FS, ut LR ad FS. Sed ob parallelas VL, SF, eſt (*c*) VL ad FS, ut VA ad AF, & LR eſt (*d*) ad FS, ut RE ad EF, aut (*e*) ut VT ad TF; ergo etiam VA erit ad AF, ut VT ad TF, atque adeo VA harmonice ſecta (*f*) erit in F & T.

(*a*) per hanc pr.
(*b*) per pr. 7. l. 5.
(*c*) per pr. 4. l. 6.
(*d*) per eand.
(*e*) per eand.
(*f*) per def. 10.

COROLLARIUM IV.

Hinc datis axe tranſverſo AB & focorum diſtantia FV, ellipſis motu continuo deſcribetur. In focis ſiquidem F & V bini figantur clavi, ipſiſque alligetur filum FMV, cujus longitudo ſit æqualis axi tranſverſo AB. Tum ope ſtyli M tendatur filum, eoque tenſo manente, ſtylus circumducatur, qui motu ſuo deſcribet quæſitam ellipſim AMB. Quippe ex hac geneſi curvæ liquet, ſummam inclinatarum FM, VM ad quodlibet ejus punctum, ſemper eandem eſſe, & quidem æqualem axi tranſverſo AB, quod competit (*g*) ſoli ellipſi.

TAB. XI. *Fig.* 7.

(*g*) per hanc pr.

COROLLARIUM V.

Simili etiam motu hyperbola deſcribetur, ductis axe tranſverſo AB, & focorum diſtantia FV. In focis ſiquidem F & V bini figantur clavi, in quorum altero V ſit fixa extremitas

TAB. XII. *Fig.* 1.

regulæ CV convertibilis circa V, alteri verò F hæreat una extremitas fili FMC, dum manet altera adfixa ad regulæ punctum C; ea autem eſſe debet regulæ longitudo, quæ longitudinem fili excedat axe tranſverſo AB. Tum ope ſtyli M adducto filo ad latus regulæ CV, & juxta ipſum tenſo, circumagatur regula, & interea filum teneatur ſemper regulæ applicatum: dico, hoc ſtyli motu quæſitam hyperbolam deſignari. Cum enim differentia rectæ CV a ſumma binarum FM, MC æqualis ſit
(a) per hyp. (a) axi tranſverſo AB, utique hinc inde ablata MC, differentia reliquarum VM, MF eadem ſemper erit, & quidem æqualis axi tranſverſo
(b) per hanc pr. AB, quod competit (b) ſoli hyperbolæ.

Propositio LX.

Tab. XII. Fig. 2.3. Inclinatæ ex focis VR, FR ad quodlibet punctum R ellipſeos aut hyperbolæ continent rectangulum VRF æquale quadrato ſemidiametri HC, conjugatæ alterius RC.

Ducta tangente RI, quæ occurrat axi tranſverſo QN in G, conjugato autem AB in M, agatur ex centro C recta CI parallela inclinatæ VR, conveniens cum tangente in puncto I, & jungatur FI, quæ perpendicula-
(c) per cor. 2. pr. 59. ris (c) erit tangenti RI. Cum itaque recti ſint anguli FIM, FCM, utique ſi ſupra FM
(d) per pr. 31. l. 3. diametro circulus deſcribatur, ipſe tranſibit (d) per I & C, unde angulus ICF æquabitur (e)
(e) per pr. 21. l. 3. IMF, ideoque illius conſequens ICG æqua-
(f) per pr. 13. l. 1. bitur (f) hujus conſequenti FMR. Verum ob parallelas VR, CI, angulus ICG æqua-
(g) per pr. 27. l. 1. lis eſt (g) RVG; ergo & angulus RVG æquabitur FMR. Sed etiam angulus VRG
(h) per pr. 58. æquatur (h) angulo FRM; ergo triangulum GVR

GVR erit ſimile (*a*) FMR, & VR ad RM erit, ut GR ad RF, atque rectangulum VRF (*b*) æquabitur GRM. Sed hoc æquatur (*c*) quadrato ſemidiametri CH, conjugatæ alterius RC; ergo etiam rectangulum VRF eidem quadrato æquale erit. (*a*) per pr. 4. l. 6. (*b*) per pr. 16. l. 6. (*c*) per pr. 54.

PROPOSITIO LXI.

In ellipſi æque ac in hyperbola ordinata ex foco ad axem FR medietas eſt parametri ejuſdem axis. TAB. XII. Fig. 4. 5.

Ductis conjugato axe IP, & parametro BZ axis tranſverſi BA, producatur RF in T. Quadratum CB eſt (*d*) ad quadratum CI, ut rectangulum BFA ad quadratum ordinatæ FR. Sed rectangulum BFA eſt æquale (*e*) quadrato CI; ergo CB quadratum erit ad quadratum CI, ut idem CI quadratum ad quadratum FR, & (*f*) CB erit ad CI, ut eadem CI ad FR, ſumptiſque duplis omnium terminorum, erit BA ad IP, ut eadem IP ad RT. Sed etiam BA eſt (*g*) ad IP, ut eadem IP ad parametrum BZ; ergo RT erit parametro BZ æqualis, ac proinde FR medietas ejus erit. (*d*) per pr. 30. (*e*) per def. 15. (*f*) per pr. 22. l. 6. (*g*) per pr. 49. & per ejus ſchol.

COROLLARIUM I.

Quia rectangulum BFA æquatur (*h*) quadrato CI, ſeu quartæ parti (*i*) rectanguli ex axe AB in BZ, utique etiam æquale erit rectangulo ex ſemiaxe CB in FR, quæ mediatas eſt (*k*) BZ. (*h*) per def. 15. (*i*) per cor. 1. pr. 30. (*k*) per hanc pr.

COROLLARIUM II.

Hinc ducta tangente RE quæ axi occurrat in puncto E, erit FR ad FE, ut CF ad CB. Nam rectangulum CFE eſt (*l*) æquale alteri BFA. Sed etiam rectangulum ex CB in (*l*) per cor. 6. pr. 14.

FR

(a) per pr. 1. FR æquatur (a) eidem rectangulo BFA; ergo & rectangulum CFE æquabitur rectangulo ex CB in FR, unde erit (b) FR ad FE, ut CF ad CB.
(b) per pr. 16. l. 6.

Definitio XVI.

Tab. XII. Fig. 4. 5. Si per punctum E ducatur recta MN parallela ordinatæ RF, vocabitur recta MN *Directrix* ellipſeos aut hyperbolæ.

Corollarium.

Igitur demiſſa ex R perpendiculari RQ ad directricem, erit FR ad RQ, ut CF ad CB. Cum enim æquentur (c) RQ, FE, ſitque (d) FR ad FE, ut CF ad CB, etiam FR erit ad RQ, ut CF ad CB.
(c) per pr. 34. l. 1.
(d) per cor. 2. pr. 61.

Propositio LXII.

Tab. XII. Fig. 6. 7. Si ex quolibet puncto H ellipſeos aut hyperbolæ ductis HK, HF, quarum altera ſit normalis axi tranſverſo AB, altera tendat ad proximum focum F, ſumatur BL ipſi HF æqualis; erit CL ad CK, ut CF ad CB.

Ducta HV ad alterum focum V, centro H & radio HF fiat ſemicirculus MFN, ipſi VH occurrens in M & N, atque iterum axi AB in O. Quia VF dupla (e) eſt CF, & OF (f) dupla KF, erit (g) VO dupla ipſius CK. Pariter cum VN ſit in ellipſi æqualis ſummæ inclinatarum VH, HF, aut differentiæ ipſarum in hyperbola, ſive axi AB (h) æqualis, utique VN dupla erit CB. Sed etiam MN dupla eſt HF vel BL (i); ergo & VM dupla erit CL. At propter circulum MFN, rectangulum NVM æquale (k) eſt FVO, & VM eſt (l) ad VO, ut VF ad VN;
(e) per cor. pr. 57.
(f) per pr. 3. l. 3.
(g) per lem. pr. 4.
(h) per pr. 59.
(i) per hyp.
(k) per cor. 1. pr. 36. l. 3.
(l) per pr. 16. l. 6.

VN; igitur ſumptis earum medietatibus, etiam CL erit ad CK, ut CF ad CB.

LEMMA.

Si quatuor rectæ fuerint proportionales, differentia primæ a tertia erit ad differentiam ſecundæ a quarta, ut prima ad ſecundam, vel ut tertia ad quartam. Tab. XII. Fig. 4. 5.

Sunto proportionales CL, CK, CB, CE: dico, LB eſſe ad KE, ut CL ad CK, vel ut CB ad CE. Quia CL eſt ad CK (*a*), ut CB ad CE, erit (*b*) permutando, CL ad CB, ut CK ad CE, & (*c*) invertendo, CB ad CL, ut CE ad CK, & (*d*) dividendo in Fig. 8., convertendo (*e*) autem in altera, erit LB ad CL, ut KE ad CK, & denique (*f*) permutando, LB erit ad KE, ut CL ad CK, vel ut CB ad CE.

(*a*) per hyp.
(*b*) per pr. 16. l. 5.
(*c*) per ſchol. pr. 16. l. 5.
(*d*) per pr. 17. l. 5.
(*e*) per cor. 1. pr. 18. l. 5.
(*f*) per pr. 16. l. 5.

PROPOSITIO LXIIII.

Si ex quolibet puncto G ellipſeos aut hyperbolæ ducta GH normali ad directricem, agatur GF ad proximum focum F; erit FG ad GH, ut CF ad CB. Tab. XII. Fig. 4. 5.

Ducta ordinata GK, quæ parallela erit ipſi RF, atque adeo etiam (*g*) directrici, ſumatur BL ipſi GF æqualis. Quia RE ſectionem tangit in R, erit (*h*) CF ad CB, ut CB ad CE. Sed CL eſt ad CK, ut (*i*) CF ad CB; ergo etiam CL erit ad CK, ut CB ad CE, unde quatuor rectæ CL, CK, CB, CE erunt proportionales, ideoque (*k*) LB erit ad KE, ut CL ad CK, vel ut CB ad CE, aut (*l*) ut CF ad CB. Eſt autem LB ipſi FG (*m*) æqualis, & (*n*) KE ipſi GH; ergo & FG erit ad GH, ut CF ad CB.

(*g*) per def. 16.
(*h*) per cor. 4. pr. 14.
(*i*) per pr. 62.
(*k*) per lem. præc.
(*l*) per cor. 4. pr. 14.
(*m*) per hyp.
(*n*) per pr. 34. l. 1.

Corollarium.

Hinc producta KG in O, ubi conveniat cum tangente, erunt æquales FG, KO. Nam FG eſt ad GH, ut (a) CF ad CB. Sed etiam FR eſt (b) ad RQ, ut CF ad CB; ergo (c) FG erit ad GH, ut FR ad RQ. Sunt vero GH, RQ æquales (d) ipſis KE, FE; ergo & FG erit ad KE, ut FR ad FE. Verum ob parallelas FR, KO, eſt (e) KO ad KE, ut FR ad FE; ergo etiam (f) FG erit ad KE, ut KO ad KE, ideoque æquabuntur (g) FG, KO.

(a) per hanc pr.
(b) per cor. def. 16.
(c) per pr. 11. l. 5.
(d) per 34. l. 1.
(e) per cor. 1. pr. 4. l. 6.
(f) per pr. 11. l. 5.
(g) per pr. 9. l. 5.

Propoſitio LXIV.

Tab. XII. Fig. 4. 5.

Iiſdem manentibus, tangens BS ducta ex vertice axis B, æqualis eſt rectæ BF, diſtantiæ nempe ejuſdem verticis a proximo foco F.

Quia CE eſt ad CB, ut eadem (h) CB ad CF, etiam dividendo (i) in ellipſi, & convertendo (k) in hyperbola, erit BE ad CB, ut BF ad CF, & (l) permutando, BE ad BF, ut CB ad CF, & (m) invertendo, BF ad BE, ut CF ad CB. Sed in eadem ratione CF ad CB, eſt quoque (n) FR ad RQ, ſive FR ad FE, ſeu (o) BS ad BE; ergo & BF erit (p) ad BE, ut BS ad BE, ideoque æquabuntur BF, BS.

(h) per cor. 4. pr. 14.
(i) per pr. 17. l. 5.
(k) per cor. 1. pr. 18. l. 5.
(l) per pr. 16. l. 5.
(m) per ſchol. pr. 16. l. 5.
(n) per cor. def. 16.
(o) per cor. 1. pr. 4. l. 6.

Corollarium.

Hinc ducta ex vertice alio A tangente AD, quæ in D conveniat cum ER, etiam æquabuntur AF, AD. Cum enim rectangulum ex AD in BS ſit pars quarta rectanguli (q) ex AB in BZ, æquabitur etiam quadrato CI (r), aut rectangulo AFB (ſ); unde AD erit (t) ad AF, ut FB ad BS. Sunt vero æquales

(p) per pr. 11. l. 5.
(q) per pr. 15.
(r) per cor. 1. pr. 30.
(ſ) per def. 15.
(t) per pr. 16. l. 6.

les (*a*) FB, BS; ergo & æquabuntur AD, AF. (*a*) per hanc pr.

CAPUT XII.

De areis trium ſectionum coni.

PROPOSITIO LXV.

Si in quavis ſectione conica VAR, cujus diameter AO, capiatur FG infinite parva reſpectu abſciſſæ AG, ordinenturque infinite propinquæ GP, FS; hæ pro æqualibus ſumi poterunt, hoc eſt proxime æquabuntur. TAB. XIII. *Fig.* 1.

QUia curva VAR ſpectari poteſt velut polygonum ex infinitis atque infinite parvis laterculis rectis conſtans, utique infinite parvus arcus SP ex his lateribus unum erit, ideoque PS producta uſque ad diametri occurſum H, poterit accipi pro tangente curvam in puncto P. Igitur ducta ST parallela lateri HG trianguli PHG, erit (*b*) TP ad GP, ut ST ad HG, ſive (*c*) ut FG ad HG. Verum cum ſit FG infinite parva reſpectu AG (*d*), multo magis erit infinite parva reſpectu HG; ergo & TP infinite parva erit reſpectu GP. Sed quantitas infinite parva abſque errore negligi tuto poteſt reſpectu quantitatis finitæ, cujuſmodi eſt GP; ergo proxime erunt æquales GP, GT, atque adeo etiam (*e*) GP, FS.

(*b*) per cor. 1. pr. 4. l. 6.
(*c*) per pr. 34. l. 1.
(*d*) per hyp.
(*e*) per pr. 34. l. 1.

Corollarium I.

Si quoque ex alio puncto M ſupra verticem A accepto, agatur ME parallela ad ordinatas FS, GP, inde vero ex S & P ducantur SQ, PK diametro parallelæ, & cum ME convenientes in Q & K; hæ quoque proxime æquabuntur. Producta enim FS in L, erunt (*a*) æquales FG, LP, atque MG, KP. Eſt vero FG infinite (*b*) parva reſpectu AG, atque adeo multo magis reſpectu MG; ergo & LP infinite parva erit reſpectu PK, ideoque LK, PK, ſive (*c*) SQ, PK proxime æquabuntur.

(*a*) per pr. 34. l. 1.
(*b*) per hyp.
(*c*) per 34. l. 1.

Corollarium II.

Circumſcriptum parallelogrammum GFLP proxime æquale erit inſcripto alteri GFST. Quippe parallelogrammum GFLP eſt (*d*) ad aliud æque altum GFST, ut GP ad GT, ſive (*e*) ut GP ad FS; ergo cum hæ proxime ſint (*f*) æquales, etiam parallelogrammum GFLP proxime æquabitur alteri GFST.

(*d*) per pr. 1. l. 6.
(*e*) per pr. 34. l. 1.
(*f*) per hanc pr.

Corollarium III.

Quoniam rectæ PK, SQ, ſive (*g*) PK, LK proxime ſunt (*h*) æquales, etiam circumſcriptum parallelogrammum QTPK proxime æquale erit inſcripto alteri QSLK.

(*g*) per pr. 34. l. 1.
(*h*) per cor. 1.

Corollarium IV.

Quia parallelogramma GFLP, GFST magis differunt inter ſe, quam a trapezio GFSP, ſequitur quod ſi illa proxime ſunt (*i*) æqualia, multo magis alterutrum eorundem proxime æquale erit trapezio GFSP.

(*i*) per cor. 2.

Corollarium V.

Simili modo liquet, alterutrum ex parallelogrammis QTPK, QSLK proxime æquari trapezio QSPK.

Pro-

PROPOSITIO LXVI.

Si ex quolibet puncto P parabolæ QAR agantur PF, PT, quarum altera tendat ad focum F, altera ſit normalis ad directricem; ſpatium DACPT duplum erit correſpondentis ſectoris AFPC. TAB. XIII. Fig. 2.

ORdinata axi PO, & ducta FH infinite proxima ipſi FP, erit arcus PH infinite parvus, ideoque (*a*) haberi poterit velut recta, quæ ſi producatur uſque ad axis occurſum L, continget curvam in puncto P. Agatur denique recta HE æqualis & parallela ipſi PT quæ directrici occurrat in puncto S, ordinatæ autem in G, junganturque ET, FT. Parallelogrammum PHET habet communem baſim HP cum triangulo PFH, & quia FT normaliter (*b*) & bifariam (*c*) diviſa eſt a tangente PL in I, erit TI altitudo parallelogrammi PHET, & FI altitudo trianguli PFH; ergo cum ſint (*d*) æquales TI, FI, parallelogrammum PHET duplum (*e*) erit trianguli PFH. Sed parallelogrammum PHET æquatur (*f*) alteri PGST æque alto & ejuſdem baſis; ergo & parallelogrammum PGST ſive trapezium (*g*) PHST duplum erit (*h*) trianguli PFH. Pari modo conſtabit, ſingula hujuſmodi trapezia quæ complent ſpatium DACPT ſemper dupla eſſe ſingulorum triangulorum correſpondentium, quæ complent ſectorem parabolæ AFPC; ergo & ſpatium DACPT duplum erit ſectoris AFPC.

(*a*) per pr. 65.
(*b*) per cor. 3. pr. 20.
(*c*) per cor. 2. pr. 20.
(*d*) per idem cor.
(*e*) per pr. 41. l. 1.
(*f*) per pr. 35. l. 1.
(*g*) per cor. 5. pr. 65.
(*h*) per pr. 41. l. 1.

Propositio LXVII.

Tab. XIII. Fig. 2.

Iiſdem manentibus, ſi jungatur AI, quæ ipſi PT occurrat in puncto V, ſegmentum parabolæ OACP erit ad circumſcriptum rectangulum OAVP, ut 2 ad 3.

Quoniam eſt AI ipſi (a) AD normalis, rectangulum erit DAVT. Verum hoc rectangulum & triangulum APF habent æquales (b) baſes AD, AF, æqualeſque pariter altitudines (c) VA, PO; ergo rectangulum DAVT duplum (d) erit trianguli APF. Si ergo DAVT auferatur ex ſpatio DACPT, & APF ex ſectore AFPC, remanebit ſpatium ACPV duplum (e) ſpatii reliqui APC. Hæc autem ſpatia ſimul ſumpta complent triangulum AVP, vel (f) AOP; ergo triangulum AOP triplum erit ſpatii APC, ideoque ſegmentum OACP erit ejuſdem quadruplum, atque rectangulum OAVP ſextuplum ejus erit. Rectangulum itaque OAVP erit ad ſegmentum parabolæ OACP, ut 6 ad 4, ſive ut 3 ad 2, & invertendo (g) ſegmentum OACP erit ad rectangulum OAVP, ut 2 ad 3.

(a) per cor. 4. pr. 20.
(b) per cor. 1. def. 13.
(c) per pr. 34. l. 1.
(d) per pr. 41. l. 1.
(e) per pr. 66.
(f) per pr. 34. l. 1.
(g) per ſchol. pr. 16. l. 5.

Corollarium I.

Quia ſegmentum parabolæ OACP eſt ad circumſcriptum rectangulum OAVP, ut 2 ad 3, eſtque 2 æqualis duabus tertiis partibus ipſius 3; etiam ſegmentum parabolæ OACP æquabitur duabus tertiis partibus circumſcripti rectanguli OAVP, atque adeo dabitur area, ſive habebitur quadratura ſegmenti parabolæ OACP.

Co-

COROLLARIUM II.

Hinc ſi diviſa ordinata OP in tres partes æquales OB, BC, CP, agatur ex C recta CD parallela ipſi OA vel PV, erit rectangulum OADC æquale duabus tertiis partibus (*a*) rectanguli OAVP, aut ſegmento parabolæ (*b*) OAP. TAB. XIII. *Fig.* 3. (*a*) per pr. 1. l. 6. (*b*) per cor. 1. hujus pr.

COROLLARIUM III.

Quare ducta quacunque alia ordinata FG, habebis quadraturam ſpatii OFGP, ſi factum ex AF in duas tertias partes rectæ FG, auferas ex producto, quod oritur multiplicando AO per duas tertias partes alterius rectæ OP.

LEMMA.

Si ſingulæ magnitudines AB, BC, CD fuerint ad ſingulas EF, FG, GL in data ratione M ad N; etiam illarum ſumma AD erit ad harum ſummam EL in eadem ratione M ad N. TAB. XIII. *Fig.* 4.

Quia AB eſt (*c*) ad EF, ut M ad N, & BC ad FG, ut (*d*) M ad N, erit (*e*) AB ad EF, ut BC ad FG. Pari modo oſtendam, eſſe BC ad FG, ut CD ad GL; ergo omnium antecedentium ſumma AD erit (*f*) ad omnium conſequentium ſummam EL, ut antecedens unum AB ad conſequens ſuum EF, ſive ut M ad N. (*c*) per hyp. (*d*) per hyp. (*e*) per pr. 11. l. 5. (*f*) per pr. 12. l. 5.

PROPOSITIO LXVIII.

TAB. XIII. Fig. 5. 6. 7. Si in duabus ſectionibus AL, AK circa eandem diametrum AS deſcriptis, ſingulæ ordinatæ OG, OD eidem abſciſſæ correſpondentes, ſint ubique in data ratione M ad N; etiam ſegmentum OAG erit ad alterum OAD, ut M ad N.

Sumpta OP infinite parva reſpectu abſciſſæ AO, agantur ordinatæ PT, PC ipſis OG, OD infinite propinquæ, & curvæ utrique circumſcribantur parallelogramma OPFG, OPED, quæ proxime æqualia erunt (a) trapeziis OPTG, OPCD, ideoque parallelogrammum OPFG erit ad aliud OPED, ut trapezium OPTG ad trapezium OPCD. Sed parallelogrammum OPFG eſt ad aliud OPED (b), ut OG ad OD vel (c) ut M ad N; ergo & trapezium OPTG erit ad trapezium OPCD, ut M ad N. Eandem ob cauſam, ſumpta PR ipſi PO æquali, ductiſque ordinatis RI, RV, erit trapezium PRIT ad trapezium PRVC, ut PT ad PC; ſive (d) ut M ad N, & ſic ſemper; ergo & ſumma omnium trapeziorum, quæ complent ſegmentum OAG, erit (e) ad ſummam totidem trapeziorum, quæ complent ſegmentum OAD, ut M ad N; ac proinde in eadem quoque ratione erit ſegmentum OAG ad alterum OAD.

(a) per cor. 2. pr. 65.
(b) per pr. 1. l. 6.
(c) per hyp.
(d) per hyp.
(e) per lem. præc.

COROLLARIUM.

TAB. XIII. Fig. 7. Si curvæ AL, AK ſint duo rami unius, ejuſdemque curvæ LAK, tunc ratio OG ad OD, ſive M ad N evadit ratio æqualitatis; ergo & (f) ſegmentum OAG erit ad alterum OAD in eadem ratione æqualitatis, ac proinde hæc ſegmenta mutuo æquabuntur.

(f) per hanc pr.

Pro-

PROPOSITIO XLIX.

Si ſuper ellipſis axe tranſverſo AB fiat ſemicirculus AKB, ſemiellipſis erit ad ſemicirculum, ut ſemiaxis conjugatus CL ad ſemiaxem tranſverſum CA. Tab. XIII. Fig. 8.

PRoducatur CL in K, & ſumpto quolibet puncto O in axe AB, ordinetur ipſi OG, quæ producta ſemicirculum ſecet in puncto D, eritque OG (a) ad CL, ut OD ad CK, & (b) permutando, OG ad OD, ut CL ad CK, vel ut CL ad CA. Ducta pariter ordinata altera RI, quæ circulo occurrat in puncto V, etiam RI erit ad RV, ut CL ad CA, & ſic ſemper; ergo ſingulæ ordinatæ ellipſeos AIL erunt ad ſingulas ordinatas circuli AVK in data ſemper ratione CL ad CA, ideoque etiam ſegmentum AGO erit (c) ad alterum ADO in eadem ratione CL ad CA. Simili modo oſtendam, ſegmentum etiam BGO eſſe ad aliud BDO, ut CL ad CA; ergo AGO erit (d) ad ADO, ut BGO ad BDO, unde & ſumma antecedentium, ſemiellipſis ſcilicet ALB, erit (e) ad ſummam conſequentium, nempe ad ſemicirculum AKB, ut unum antecedens, nempe AGO ad ſuum conſequens, ſcilicet ADO, vel ut CL ad CA.

(a) per Pr. 12.
(b) per Pr. 16. l. 5.
(c) per Pr. 68.
(d) per Pr. 11. l. 5.
(e) per Pr. 12. l. 5.

COROLLARIUM.

Hinc invertendo (f), ſemicirculus AKB erit ad ſemiellipſim ALB, ut ſemiaxis tranſverſus CA ad ſemiaxem conjugatum CL; quapropter ſi nota eſſet quadratura ſemicirculi AKB, etiam per regulam auream innoteſceret quadratura ſemiellipſeos ALB, unde una ab altera dependebit.

(f) per ſchol. pr. 16. l. 5.

Propositio LXX.

Tab. XIV. Fig. 1. Si latere recto NR æquale axi tranſverſo NQ hyperbolæ æquilateræ NMS, fiat ad eundem axem parabola NBF, & in hac ſumpto quolibet puncto B, agatur BD parallela axi NQ, quæ hyperbolam ſecet in puncto M, & conjugatum axem TL in D; hyperbolicum ſpatium NCDM æquale erit rectangulo ex ſemiaxe tranſverſo CN in parabolæ arcum NB.

Ductis MK, BA, quarum altera ad hyperbolam, ad parabolam altera ordinetur, agatur EH parallela & infinite propinqua ipſi DB, quæ ex parabola abſcindet infiniteſimum arcum BI, quo producto uſque ad axis occurſum G, prodibit BG, parabolam tangens in puncto B. Denique huic tangenti ducta BP normali, jungatur ND. Quia ſubnormalis AP
(a) per medietas (a) eſt parametri, æquabitur quoque
cor. 2. pr. ipſi CN. Sed in triangulis PAB, NCD
14. ſunt (b) etiam æquales AB, CD, & recti an-
(b) per hyp. guli A & C; ergo & æquabuntur (c) BP,
(c) per DN. Sed quia MK quadratum æquale eſt (d)
pr. 4. l. 1. rectangulo QKN, addito utrinque quadrato
(d) per cor. 2. pr. CN, ſumma quadratorum MK, CN, ſive
10. CD, CN, hoc eſt (e) DN quadratum æqua-
(e) per pr. 47. l. 1. bitur ſummæ rectanguli QKN & CN quadrati, hoc eſt (f) quadrato CK, vel (g) DM;
(f) per pr. 6. l. 2. ergo æquales erunt etiam DN, DM, atque
(g) per pr. 34. l. 1. adeo etiam BP, DM. Porro cum rectus angulus PBI æquetur recto alteri ABM, ablato hinc inde angulo ABI, etiam reliquus PBA
(h) per æquabitur reliquo MBI, aut huic (h) alterno
pr. 27. l. 1. angulo HIB. Sed etiam rectus angulus PAB æquatur recto IHB; ergo triangulum ABP

erit

erit (*a*) ſimile HIB, & BP erit ad BI, ut PA ad BH. Verum BP æqualis (*b*) eſt ipſi DM, PA ipſi CN, & BH ipſi MO; ergo & DM erit ad BI, ut CN ad MO, & rectangulum EDMO ſive (*c*) trapezium EDMV æquale erit (*d*) rectangulo ex CN in BI. Eodem modo conſtabit, ſingula hujuſmodi trapezia, quæ componunt ſpatium NCDM, ſemper æquari ſingulis rectangulis ex CN in ſingulas correſpondentes particulas arcus NB; igitur totum ſpatium NCDM æquabitur rectangulo ex ſemiaxe tranſverſo CN in totum parabolæ arcum NB.

(*a*) per pr. 4. l. 6.
(*b*) per pr. 34. l. 1.
(*c*) per cor. 3. pr. 65.
(*d*) per pr. 16. l. 6.

COROLLARIUM I.

Igitur quadratura ſpatii NCDM hyperbolæ æquilateræ pendet a rectificatione, ſeu longitudine parabolici arcus NB.

COROLLARIUM II.

Quia ſi ex rectangulo CKMD auferatur ſpatium NCDM, relinquitur ſegmentum hyperbolæ NKM; etiam quadratura ſegmenti hyperbolæ æquilateræ pendere debet a rectificatione parabolici arcus NB.

PROPOSITIO LXXI.

Si eodem latere tranſverſo AQ, & lateribus rectis AE, AH deſcribantur hyperbolæ AL, AK, & ſumpta AV media proportionali inter AE & AH, ordinentur utrique curvæ OG, OD; ſegmentum AGO erit ad ſegmentum alterum ADO, ut AE ad AV.

TAB. XIV. *Fig.* 2.

QUadratum OG eſt (*e*) ad rectangulum QOA, ut AE ad AQ. Atqui rectangulum QOA eſt ad ordinatæ OD quadratum, ut (*f*) AQ ad AH; ergo (*g*) ex æquo, quadratum OG erit ad quadratum OD, ut AE

(*e*) per cor. 1. pr. 10.
(*f*) per idem cor.
(*g*) per pr. 22. l. 5.

 ad

(a) per ad AH. Sed quia AE eſt (a) ad AV, ut
hyp. AV ad AH, quadratum AE eſt (b) ad AV
(b) per cor. 2. pr. quadratum, ut AE ad AH; ergo (c) & qua-
20. l. 6. dratum OG erit ad quadratum OD, ut qua-
(c) per pr. 11. l. 5. dratum AE ad quadratum AV, ideoque ordi-
(d) per nata OG erit (d) ad ordinatam OD, ut AE
pr. 22. l. 6. ad AV. Si quoque ex altero puncto R agantur ordinatæ RI, RF, etiam ordinata RI erit ad ordinatam RF in eadem ratione AE ad AV, & ſic ſemper; ergo & ſegmentum AGO erit
(e) per (e) ad ſegmentum alterum ADO in eadem
pr. 68. ratione AE ad AV.

COROLLARIUM I.

Quare ſi nota eſſet quadratura ſegmenti ADO unius hyperbolæ ADK, per regulam auream haberetur etiam quadratura ſegmenti AGO alterius hyperbolæ AGL.

COROLLARIUM II.

Quia dum latus tranſverſum AQ æquale eſt
(f) per lateri recto AH, æquilatera evadit (f) hyper-
cor. 2. pr. bola ADK, conſequens eſt, ut habita quadra-
10. tura ſegmenti ADO hyperbolæ æquilateræ, etiam detegatur quadratura ſegmenti AGO alterius hyperbolæ AGL.

COROLLARIUM III.

Unde cum quadratura ſegmenti ADO hyper-
(g) per bolæ æquilateræ ADK ſoleat dependere (g) a
cor. 2. pr. rectificatione arcus parabolæ, utique ab eadem
70. quoque pendere debet quadratura ſegmenti AGO alterius hyperbolæ AGL.

CA-

CAPUT XIII.

De ſpatiis hyperbolicis, quæ curva & aſymptoto continentur.

DEFINITIO XVII.

SI ex punctis quibuslibet A & B hyperbolæ MKG ducantur AE, BO parallelæ aſymptoto uni CF; dicentur hæ *Ordinatæ* aſymptoto alteri CI, & rectæ CE, CO a centro hyperbolæ computatæ, *Abſciſſæ* appellabuntur. TAB. XIV. *Fig.* 3.

PROPOSITIO LXXII.

Ordinatæ AE, BO aſymptoto uni CI ſunt inter ſe in ratione reciproca abſciſſarum, ſive AE eſt ad BO, ut OC ad EC. TAB. XIV. *Fig.* 3.

DUctis ordinatis AL, BH aſymptoto alteri CF, jungatur AB, quæ aſymptotos ſecet in S & V. Quoniam ſunt (*a*) æquales BS, AV, atque adeo etiam AS, BV, erit AS ad SB, ut BV ad VA. Sed propter parallelas AE, BO, eſt (*b*) AS ad SB, ut AE ad BO, & ob parallelas AL, BH, eſt (*c*) BV ad VA, ut BH ad AL: ergo etiam AE erit ad BO, ut BH ad AL. Sunt vero (*d*) æquales BH, OC, atque AL, EC; ergo & AE erit ad BO, ut OC ad EC.

(*a*) per cor. pr. 63.
(*b*) per cor. 1. pr. 4. l. 6.
(*c*) per idem cor.
(*d*) per pr. 34. l. 1.

COROLLARIUM I.

Cum AE ſit ad BO (*e*), ut OC ad EC, rectangulum ex AE in EC æquabitur (*f*) rectangulo ex BO in OC.

(*e*) per hanc pr.
(*f*) per pr. 16. l. 6.

Corollarium II.

(a) per hanc pr. Quia AE eſt ad BO (a), ut OC ad EC; parallelogramma ALCE, BHCO circa æquales angulos E & O habebunt latera reciproce proportionalia, ideoque (b) mutuo æquabuntur. (b) per pr. 14. l. 6.

Corollarium III.

Igitur junctis CA, CB, ſector hyperbolicus ACBK æquabitur ſpatio AEOBK. Nam quia parallelogrammum ALCE æquale eſt (c) per cor. 2. (c) alteri BHCO, etiam triangulum ACE (d) æquabitur alteri BCO, unde utrinque (d) per pr. 34. l. 1. ablato triangulo CRE, reliquum triangulum ACR æquale erit reliquo trapezio BREO, quibus ſi addatur ſpatium ARBK, ſector hyperbolicus ACBK fiet æqualis ſpatio AEOBK.

Propositio LXXIII.

Tab. XIV. Fig. 5. Si in aſymptoto una CI hyperbolæ LKM ſumantur tres abſciſſæ continue proportionales CE, CO, CV, ductiſque ex E, O, V eidem aſymptoto ordinatis EA, OK, VB, alteri quoque aſymptoto ordinentur BH, KR, AG prioribus occurrentes in P, K, T; junctæ CP, PK, KT erunt poſitæ in directum, ſeu recta erit linea CPKT.

(e) per hyp. Recta CE eſt (e) ad CO, ut eadem CO ad CV. Sed CO eſt ad CV, ut (f) (f) per pr. 72. BV ad KO, vel (g) ut CH ad CR; ergo & CE erit ad CO, ut CH ad CR. Paral- (g) per pr. 34. l. 1. lelogramma itaque PHCE, KRCO habent latera proportionalia circa communem angu- (h) per pr. 24. l. 6. lum C, ideoque ſimilia erunt, & (h) poſita circa eandem diagonalem. Sed eſt CP diagonalis parallelogrammi PHCE; igitur CPK erit diagonalis alterius KRCO, atque adeo

hæc linea recta erit. Rurſus CE eſt (a) ad CO, ut eadem CO ad CV. Sed CE eſt (b) ad CO, ut KO ad AE, vel (c) ut CR ad CG; ergo & CR erit ad CG, ut CO ad CV, ideoque parallelogramma KRCO, TGCV cum habeant latera circa commune angulum C proportionalia, erunt ſimilia, & poſita (d) circa eandem diagonalem. Vidimus autem rectam CPK eſſe diagonalem parallelogrammi KRCO; ergo CPKT erit quoque diagonalis alterius TGCV, ac proinde hæc linea recta erit.

(a) per hyp.
(b) per pr. 72.
(c) per pr. 34. l. 1.
(d) per pr. 24. l. 6.

LEMMA.

In quovis parallelogrammo ABDE diagonales AD, BE mutuo ſe biſecant in puncto concurſus C.

Tab. XIV. Fig. 4.

Quia ſunt parallelæ AB, ED, angulus ABC (e) æquabitur DEC. Simili modo oſtendam, angulum BAC æqualem eſſe alteri CDE; ergo cum reliquus BCA æquetur (f) reliquo DCE, triangulum ACB erit (g) ſimile ECD, unde ut AB ad ED, ita erit AC ad CD, & BC ad CE. Sunt vero æquales (h) AB, ED; ergo etiam æquabuntur AC, CD, nec non BC, CE, quapropter diagonales AD, BE mutuo ſe biſecant in puncto C.

(e) per pr. 27. l. 1.
(f) per pr. 15. l. 1.
(g) per pr. 4. l. 6.
(h) per pr. 34. l. 1.

Pro-

Propositio LXXIV.

Tab. XIV. Fig. 5. Si in aſymptoto una CI hyperbolæ LKM ſumptis tribus abſciſſis CE, CO, CV in continua proportione, ducantur EA, OK, VB eidem aſymptoto ordinatæ; ſpatia AEOK, KOVB, quæ binis proximis ordinatis, arcu, & aſymptoto continentur, erunt æqualia inter ſe.

Eadem poſita conſtructione quæ in præcedenti propoſitione, ducantur CA, CB, & jungatur AB, quæ occurrat ipſi KT in S. Quia recta (*a*) eſt linea CPKT, erit PT diagonalis parallelogrammi TAPB, quæ proinde etiam biſecabit (*b*) aliam diagonalem AB in S, ideoque SC, quæ jungit punctum S cum centro C, diameter eſſe (*c*) debet, cui ordinabuntur lineæ rectæ omnes, parallelæ ipſi AB, & terminatæ utrinque ab arcu hyperbolæ AKB; unde ſegmentum KSA æquabitur (*d*) alteri KSB. Sed etiam triangulum ACS æquale eſt (*e*) alteri SCB, cum ambo ſint æque alta, & habeant æquales baſes AS, SB; ergo & ſector reliquus ACK æqualis erit ſectori reliquo BCK. Atqui ſector hyperbolicus ACK æqualis eſt (*f*) ſpatio AEOK, & ſector pariter BCK ſpatio KOVB; ergo & ſpatium AEOK æquabitur ſpatio KOVB.

(*a*) per pr. 73.
(*b*) per lem. præced.
(*c*) per cor. 1. pr. 47.
(*d*) per cor. pr. 68.
(*e*) per pr. 37. l. 1.
(*f*) per cor. 3. pr. 72.

Co-

COROLLARIUM I.

Quare ſi ex centro C cujuſvis hyperbolæ EIS ſumantur in aſymptoto una CV abſciſſæ CA, CB, CL, CD, CH in continua proportione creſcentes, ductis AI, BM, LK, DN, HO eidem aſymptoto ordinatis, correſpondentia ſpatia IABM, MBLK, KLDN, NDHO erunt æqualia (*a*) inter ſe. TAB. XIV. *Fig.* 6.

(*a*) per hanc pr.

COROLLARIUM II.

Cum ergo in aſymptoto una CV utpote infinita, poſſit proportio abſciſſarum per quotvis terminos continuari, etiam poterit aſſignari ſpatium hyperbolicum quantumvis multiplex alterius cujuſvis dati. Sic ſi quæratur ſpatium quod ſit quadruplum dati IABM, ratio CA ad CB continuanda eſt per alios tres terminos CL, CD, CH, & tunc prodibit ſpatium IAHO quadruplum (*b*) dati IABM.

(*b*) per cor. 1.

COROLLARIUM III.

Igitur ſpatium hyperbola & aſymptoto comprehenſum, eſt magnitudinis infinitæ, cum in eo poſſit ſpatium (*c*) aliquod aſſignari, quod ſit dati & finiti alterius IABM quantumvis multiplex, ſive illo infinite majus.

(*c*) per cor. 2.

COROLLARIUM IV.

Quare hyperbola EIS una ex logarithmicis curvis erit, in quibus nempe duæ magnitudinum ſeries ſibi invicem reſpondentes haberi poſſunt, quarum una procedit in geometrica, alia in arithmetica proportione. Si enim in aſymptoto una CV ſumatur ſeries abſciſſarum CA, CB, CL, CD &c. creſcentium in geometrica proportione, tunc hiſce correſpondentia ſpatia IABM, IALK, IADN &c. alteram dabunt ſeriem terminorum, creſcentium in arithmetica (*d*) proportione; unde hæc ſpatia erunt totidem *Logarithmi* correſpondentium abſciſſarum CB, CL, CD &c.

(*d*) per cor. 1.

Co-

Corollarium V.

Igitur ſi CA habeatur veluti unitas ſive initium geometricæ progreſſionis, reliquæ autem rectæ CB, CL, CD &c. referant numeros 10, 100, 1000, &c. creſcentes in geometrica proportione, tunc ſpatium IABM erit logarithmus numeri 10; ſpatium IALK logarithmus numeri 100; ſpatium IADN logarithmus numeri 1000, & ſic porro. Quia vero unitati CA nullum ſpatium correſpondet, ejus logarithmus erit nullus ſeu o.

FINIS.

Digitized by Google

Digitized by Google

Tab. I



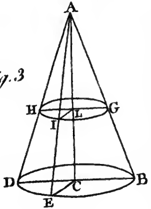
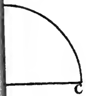


Fig. 3



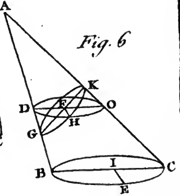
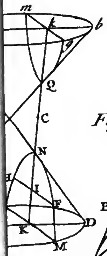


Fig. 6



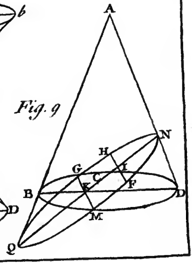


Fig. 9

Digitized by Google

Tab. II

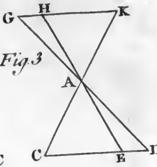


Fig. 3

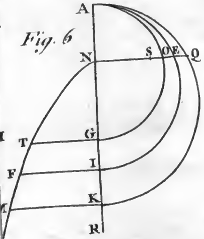


Fig. 6

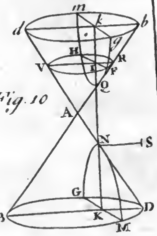
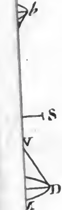


Fig. 10





Tab. III

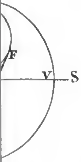


Fig. 3

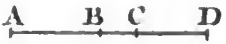


Fig. 5



g. 6

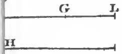
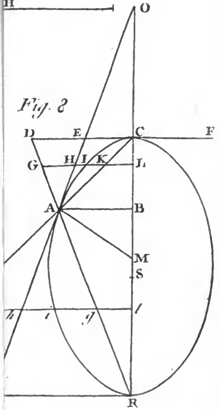


Fig. 8

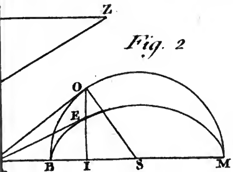


Google

Digitized by Google

Tab. IV.

Fig. 2



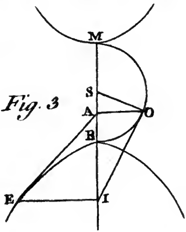


Fig. 3

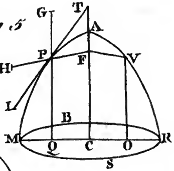


Fig. 5

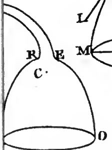
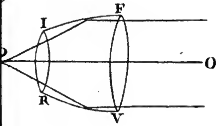


Fig. 7



Tab. V

g. 1



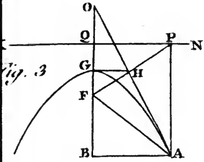
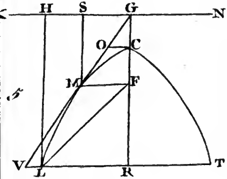
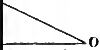


Fig. 3



5



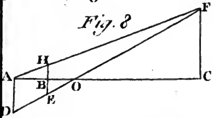


Fig. 8

Digitized by Google

Tab. VI

Fig. 3

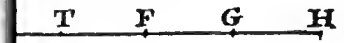


Fig. 4

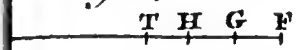
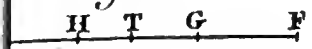
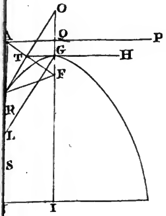
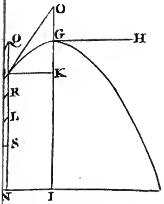


Fig. 5

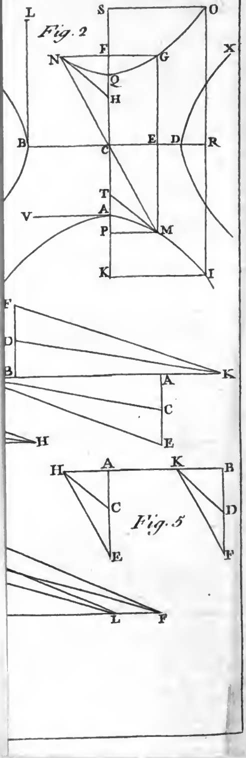






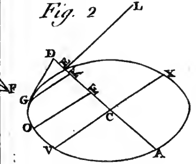
Digitized by Google

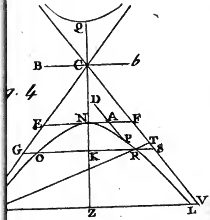
Tab. VII



Tab VIII

Fig. 2





g. 4

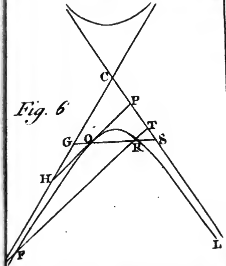
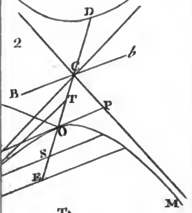
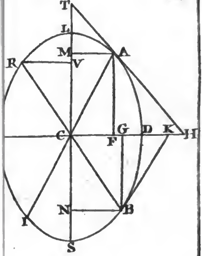


Fig. 6

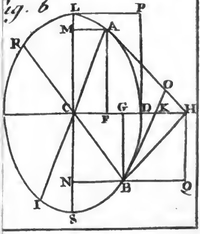
Tab IX

2





ig. 6



Tab X.

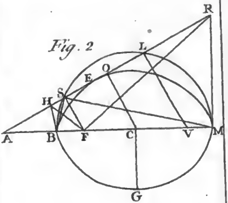


Fig. 2

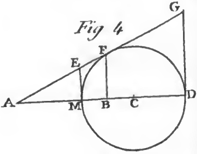


Fig 4

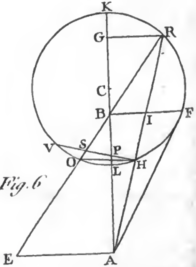
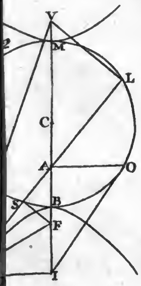


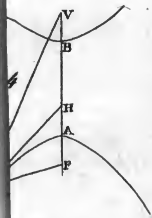
Fig. 6

Digitized by Google

2



4



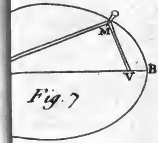
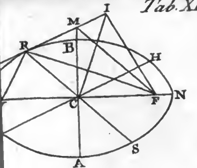


Fig. 7



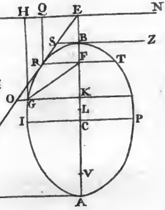


Fig. 4

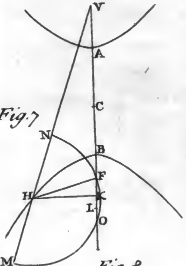


Fig. 7

Fig. 8



Fig. 9



Digitized by Google



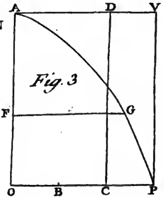


Fig. 3

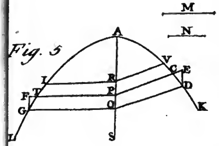


Fig. 5

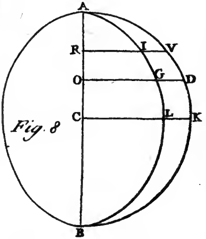


Fig. 8

Digitized by Google

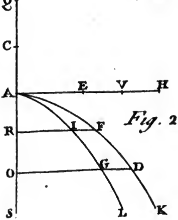
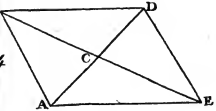


Fig. 2



4

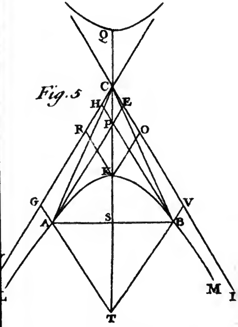


Fig. 5

Digitized by Google

Digitized by Google

005652709

Digitized by Google

KONSERVIERT DURCH
ÖSTERREICHISCHE FLORENZHILFE
WIEN 1967